偏微分方程的L^2理论

王耀东

偏微分方程的L^2理论

王 耀 东

北 京 大 学 出 版 社

偏微分方程的 L^2 理论

王耀东
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　32开本　8.875印张　200千字
1989年3月第一版　　1989年3月第一次印刷
印数：0001—5,000册
ISBN 7-301-0002-2/O·002
定价：1.85元

前　言

1982年以来，作者在北京大学和中国科学技术大学研究生院多次讲授“偏微分方程的L^2理论”这一课程，本书系对历次讲稿加工整理而成。

我们系统介绍$L^2(\Omega)$上的Sobolev空间$H^s(\Omega)$，然后在$H^s(\Omega)$中分别讨论椭圆、抛物、双曲三种类型的方程，这就必须系统地援引Hilbert空间的理论。例如解的存在性本质上都是有界线性泛函的Riesz表示定理的推论；椭圆型方程解的正则性是$H^1(\Omega)$元素的差商的L^2有界性和L^2中单位球的弱紧性的直接结果；椭圆算子的特征函数理论是Riesz-Schauder关于紧自伴算子的一般理论的具体应用。利用半群方法、Fourier变换方法、Galerkin方法、特征函数展开方法，发展型方程解的正则性可归结为椭圆型方程的相应结果。因此阅读和使用本书可把重点放在Sobolev空间和椭圆型方程，而对发展型方程可选择使用书中介绍的一种或两种方法。做每章所附的习题对掌握本书内容是不可缺少的。

作　者

1985年7月于北京大学

目　录

第一章　$H^s(\Omega)$ 空间 …………………………………… (1)

§1　引进 $H^1(\Omega)$ 的必要性 …………………………………… (1)

§2　整数次空间 $W^{m,p}(\Omega)$ …………………………………… (5)

§3　$L^2(R^n)$ 中的Fourier变换 …………………………………… (34)

§4　$H^s(R^n)$ …………………………………… (38)

§5　$H^s\ (\Omega)$ …………………………………… (48)

§6　迹 …………………………………… (56)

习题 …………………………………… (72)

第二章　椭圆型方程 …………………………………… (76)

§1　Lax-Milgram 定理 …………………………………… (76)

§2　二阶椭圆型方程的Dirichlet问题 …………………………………… (82)

§3　二阶椭圆型方程的其它边值问题 …………………………………… (88)

§4　极值原理 …………………………………… (101)

§5　Fredholm 抉择性质的应用 …………………………………… (113)

§6　解的正则性 …………………………………… (121)

§7　二阶椭圆算子的特征函数 …………………………………… (131)

习题 …………………………………… (136)

第三章　抛物型方程 …………………………………… (141)

§1　抽象函数 …………………………………… (141)

§2　$H^{r,s}(Q)$ 空间 …………………………………… (150)

§3　空间 $W(0,T;V)$ …………………………………… (171)

§4　Lions 定理和抛物型方程 …………………………………… (131)

§5　算子的连续半群和抛物型方程解的正则性 …………………………………… (202)

§6 Fourier变换和抛物型方程解的正则性 ……………(222)
习题 ……………………………………………………………(226)

第四章 双曲型方程 ……………………………………………(233)
§1 半群方法 ……………………………………………(233)
§2 Lions定理和双曲型方程……………………………(240)
§3 Galerkin方法……………………………………………(248)
§4 特征函数展开的应用 ……………………………(269)
习题 ……………………………………………………………(275)

主要参考书 ……………………………………………………(277)

第一章　$H^s(\Omega)$ 空间

§1　引进$H^1(\Omega)$ 的必要性

1.1　薄膜平衡问题

我们以考察薄膜平衡这一问题作为本章乃至全书的序幕。设一片薄膜起初盖住 x_1x_2 平面上的区域 Ω，其边界固定在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上。在密度为 $f(x_1, x_2)$ 的外力作用下，薄膜上的点 (x_1, x_2) 在垂直于 x_1x_2 平面方向上的位移为 $u(x_1, x_2)$，求薄膜形变后的形状 $u = u(x_1, x_2)$（图1）.

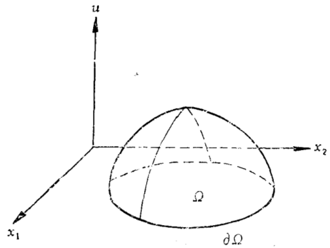


图　1

薄膜每点位移为 $v(x_1, x_2)$ 时，其形变能为

$$T\left(\int_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1 dx_2 - |\Omega|\right)$$

$$\doteq \frac{T}{2}\int_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

其中T为比例系数，$|\Omega|$表示区域Ω的面积。外力做的功是$\int_{\Omega} fv\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$，薄膜的总能量为（以下令$T=1$）

$$E=E[v]=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right)-fv\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \tag{1.1}$$

由 Dirichlet 原理，实际的位移$u(x_1,x_2)$使总能量$E[v]$取最小值

$$E[u]=\min_{v\in V}E[v]$$
$$=\min_{v\in V}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2-fv\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2, \tag{1.2}$$

其中V为在$\partial\Omega$上取零值的Ω上定义的“所有”函数的集合。

我们来探讨u应当满足的方程。任意取定函数v，v在$\partial\Omega$上取零值，考虑数值函数

$$\varphi(t)=E[u+tv]=\frac{1}{2}a(u)+\frac{1}{2}a(v)t^2$$
$$+a(u,v)t-(f,u)-(f,v)t,$$

其中

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$a(u)=a(u,u),\quad (f,v)=\int_{\Omega}fv\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

$\varphi(t)$在 $t=0$ 取最小值 $E[u]$。由 Férmat 引理,$\varphi'(0)$等于零,即

$$u\in V, a(u,v)=(f,v), \forall v\in V. \qquad (1.3)$$

这种形式的方程称为**变分方程**，v 称为**检验函数**。

若 u 和 f “光滑”，由 Green 公式可得

$$\int_\Omega (-\Delta u-f)v\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=0, \quad \forall v, v|_{\partial\Omega}=0.$$

于是由 v 的任意性可知 u 满足

$$\begin{cases} -\Delta u-f=0, & \Omega \text{ 内}, \\ u=0, & \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \qquad (1.4)$$

此即 Poisson 方程的 Dirichlet 问题。

1.2 薄膜平衡问题的精确提法

在泛函 $E(v)$的极值问题(1.2)中，我们有意回避了 v 的明确变化范围 V，只是笼统地说其中的函数在 $\partial\Omega$ 上取零值。在古典的数学物理方程中，通常假定力密度函数光滑，并要求解有连续二阶导数，从而满足 Poisson 方程。但在实际问题中，f 不光滑的情形并非罕见，例如我们设 f 是 Ω 上的 Lebesgue 意义下的平方可积函数，这时位移 u 的光滑性很难保证。为使能量表达式(1.1)有意义，我们自然应该假设

$$V\subset H^1(\Omega)=\left\{ v\in L^2(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2}\in L^2(\Omega) \right\}, \qquad (1.5)$$

其中的导数是在广义函数的意义下取的。V 中的函数在 $\partial\Omega$ 上取值为零，故

$$V=\{v\in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega}=0\}=H_0^1(\Omega). \qquad (1.6)$$

于是变分问题(1.2)的精确提法是求函数 u，满足

$$u\in H_0^1(\Omega),\ E[u]=\min_{v\in H_0^1(\Omega)}E[v]. \tag{1.7}$$

我们所要研究的课题如下：

1）首先定义弱导数和强导数，并在此基础上定义空间 $H^1(\Omega)$ 及类似的正整数次空间 $H^m(\Omega)$，研究这种空间的性质，诸如完备性、可分性、用光滑函数的逼近、延拓性质、内插性质等。

2）在极值问题(1.7)中要求 $u|_{\partial\Omega}=0$，当 $u\in H^1(\Omega)$ 时，u 只是几乎处处定义的函数，u 在边界 $\partial\Omega$ 上的值是无法按通常方式逐点定义的，我们将以一个合理的方式定义迹 $u|_{\partial\Omega}$，并将发现，$u|_{\partial\Omega}$ 是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中的一个元素，自然必须预先定义分数次空间 $H^{1/2}(\partial\Omega)$，或一般的非整数次(通称分数次)空间 $H^s(\Omega)$ 和 $H^s(\partial\Omega)$，并研究这种空间类似 $H^m(\Omega)$ 的性质，尤其要刻画 $H^s(\Omega)$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹，迹的概念和性质对边值问题、初值问题和混合问题的研究至关重要。

3）研究偏微分方程解的存在性，方程通常写成形如(1.3)的变分形式，例如对方程(1.3)，只要 $f\in(H_0^1(\Omega))'=H^{-1}(\Omega)$，就存在唯一解 $u\in H_0^1(\Omega)$。对一般椭圆型方程，解的存在性往往由Riesz有界线性泛函的表示定理的推广(Lax-Milgram定理)得到，而对发展型方程可用Lax-Milgram定理的推广(Lions定理)得到，或用半群理论得到。

4）在3)中已提到，在薄膜平衡问题中若 $f\in H^{-1}(\Omega)$，则有解 $u\in H^1(\Omega)$；若 $f\in H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$，则用差商方法可证 $u\in H^2(\Omega)$。一般地若 $f\in H^k(\Omega)$，则 $u\in H^{k+2}(\Omega)$，这就是所谓解的正则性问题。对一般的二阶椭圆型方程我们要证明同样的正则性结果。对于发展型方程主要由半群方法推导正

则性，并以椭圆型方程的正则性结果做基础。

5）当m充分大，$u\in H^m(\Omega)$，u就有适当阶数的连续导数，我们要建立这类嵌入性质，再结合4)中的解的$H^m(\Omega)$正则性，就可从变分方程的解得到偏微分方程的古典解。

§2 整数次空间$W^{m,p}(\Omega)$

我们先一般地讨论$L^p(\Omega)$上的整数次 Sobolev 空间，在讨论分数次空间和相应的迹的问题时，将只讨论$p=2$的情形。

2.1 弱导数和强导数

先引进若干通用的记号。

$\boldsymbol{R}^n$表示实n维 Euclid 空间；$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示$\boldsymbol{R}^n$中的点；$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$是非负整数，$\alpha$称为**整指标**，记

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\quad \alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n};$$

Ω是$\boldsymbol{R}^n$中的开集，定义

$$C^m(\Omega)=\{\varphi\,|\,\varphi\text{的直到}m\text{阶的偏导数在}\Omega\text{连续}\},$$

$$C^m(\bar{\Omega})=\{\varphi\,|\,\varphi\text{的直到}m\text{阶的偏导数在}\Omega\text{一致连续}\}.$$

以下我们以D_j记$\partial/\partial x_j$，

$$D=(D_1,D_2,\cdots,D_n),$$

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}=\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}.$$

易知若$\varphi\in C^m(\bar{\Omega})$，则对任意重指标$\alpha$，$|\alpha|\leqslant m$，$D^\alpha\varphi$可延拓为$\bar{\Omega}$上的一个连续函数，延拓后仍记为$D^\alpha\varphi$。我们定义无穷次可微函数空间

$$C^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}C^{m}(\Omega),\qquad C^{\infty}(\bar{\Omega})=\bigcap_{m=1}^{\infty}C^{m}(\bar{\Omega}).$$

对连续函数 φ 定义其支集

$$\operatorname{supp}\varphi=\{x\in\Omega\,|\,\varphi(x)\neq 0\}^{-},$$

其中"$-$"表示在 $\boldsymbol{R}^n$ 中取闭包。进而定义

$$C_0^m(\Omega)=\{\varphi\in C^m(\Omega)\,|\operatorname{supp}\varphi\text{有界且}\subset\Omega\},$$

$$C_0^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{m=1}^{\infty}C_0^m(\Omega).$$

若有界开集 Ω' 的闭包 $\bar{\Omega}'\subset\Omega$，则记 $\Omega'\subset\subset\Omega$。又定义 Ω 上的局部可积函数空间

$$L_{loc}^1(\Omega)=\{u\,|\,u\text{在}\Omega\text{可测，且}\forall\,\Omega'\subset\subset\Omega,\ u\in L^1(\Omega')\}.$$

定义1.1 设 $u,v\in L_{loc}^1(\Omega)$，$\alpha\in\boldsymbol{Z}_+^n$，$\boldsymbol{Z}_+$ 为非负整数集。若对任意 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，有等式

$$\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}v\varphi\,\mathrm{d}x,\qquad(1.8)$$

则说 v 是 u 的 α 阶**弱导数**，记作 $v=D^{\alpha}u$。

显然，若 u 的弱导数 $D^{\alpha}u$ 存在必唯一。又若 $u\in C^m(\Omega)$，$|\alpha|\leqslant m$，由Green公式知对任意 $\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega)$，

$$\int_{\Omega}uD^{\alpha}\varphi\,\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}(D^{\alpha}u)\varphi\,\mathrm{d}x.$$

故通常的导数 $D^{\alpha}u$ 正是 u 的 α 阶弱导数。

在讨论 Sobolev 空间中的函数的某些性质时，往往先对光滑函数($C^m(\Omega)$函数甚至 $C^{\infty}(\Omega)$函数）证明该性质，然后过渡到极限，这就需要能用光滑函数在某种意义下逼近给定函数。为此引进光滑子 $\rho=\rho(x)$，满足

1) $\rho\in C^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)$，

2) $\operatorname{supp}\rho\subset\overline{B_1(0)}=\{x\in\boldsymbol{R}^n \mid |x|\leqslant 1\}$,

3) $\int_{\boldsymbol{R}^n}\rho(x)dx=1$。

这样的光滑子是存在的。例如

$$\rho(x)=\begin{cases} C\exp(|x|^2-1)^{-1}, & 若|x|<1; \\ 0, & 若|x|>1. \end{cases} \tag{1.9}$$

其中选取常数

$$C=\left(\int_{B_1(0)}\exp(|x|^2-1)^{-1}\mathrm{d}x\right)^{-1}.$$

$\{\varepsilon^{-n}\rho(x\varepsilon^{-1})\mid\varepsilon>0\}$ 称为**光滑子族**。对 $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ 作卷积

$$(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y, \tag{1.10}$$

$J_\varepsilon u$ 称为 u 的**光滑化**。算子 J_ε 的作用是把函数"磨光"，其意义体现在下列定理中。

定理1.1 设函数u及其弱导数$D^\alpha u$属于 $L^p_{loc}(\Omega)(p\geqslant 1)$，则 $J_\varepsilon u\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，且对任意开集 $\Omega'\subset\subset\Omega$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega'}|J_\varepsilon u(x)-u(x)|^p\mathrm{d}x\to 0,\\ &\int_{\Omega'}|D^\alpha u_\varepsilon(x)-D^\alpha u(x)|^p\mathrm{d}x\to 0.\end{aligned} \tag{1.11}$$

证明 设 $\varepsilon<\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega)=d>0$，$x\in\Omega'$，则

$$\begin{aligned}J_\varepsilon u(x)&=\varepsilon^{-n}\int_{|y-x|<\varepsilon}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\mathrm{d}y\\ &=\int_{|z|<1}\rho(z)u(x-\varepsilon z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

注意到$\int_{|z|<1}\rho(z)\mathrm{d}z=1$，我们有

$$J_\varepsilon u(x)-u(x)=\int_{|z|<1}\rho(z)(u(x-\varepsilon z)-u(x))\mathrm{d}z.$$

由 Minkowski 不等式，有

$$\|J_\varepsilon u-u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)\|u(x-\varepsilon z)-u(x)\|_{L^p(\Omega')}\mathrm{d}z.$$

由$L^p(\Omega)$中平移的连续性，有

$\|u(x-\varepsilon z)-u(x)\|_{L^p(\Omega')}\to 0$，当$\varepsilon\to 0$时，关于$z\in B_1(0)$一致。故有

$$\|J_\varepsilon u-u\|_{L^p(\Omega')}\to 0(\varepsilon\to 0).$$

对于$x\in\Omega'\subset\subset\Omega$，当$\varepsilon<d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$时，$\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$作为$y$的函数属于$C_0^\infty(\Omega)$，在积分号下关于$x$求导数得

$$D^\alpha(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega D_x^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y,$$

$$J_\varepsilon u\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n).$$

由复合函数微商法则，注意到$D_{x_j}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)=-D_{y_j}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$，易知

$$\int_\Omega D_x^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y$$

$$=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)u(y)\mathrm{d}y.$$

再由弱导数定义得

$$D^\alpha(J_\varepsilon u)(x)=\varepsilon^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)D^\alpha u(y)\mathrm{d}y=J_\varepsilon(D^\alpha u)(x).$$

对 $D^\alpha u$ 利用对 u 已得的结果即得

$$\|D^\alpha J_\varepsilon u - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega')} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0). \quad \blacksquare$$

定义1.2 设 $u, v \in L^p_{loc}(\Omega)$，$\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ 给定，若对任意 $\Omega' \subset\subset \Omega$，存在函数序列 $u_m \in C^\infty(\Omega')$ 使

$$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega')} \to 0, \quad \|D^\alpha u_m - v\|_{L^p(\Omega')} \to 0 \quad (m \to \infty), \tag{1.12}$$

则称 v 是 u 在L^p中的 α 阶**强导数**，并记作$D^\alpha u$。

显然 u 的 L^p 中的 α 阶强导数必为同阶弱导数；定理1.1则说明，若 u 及其弱导数 $D^\alpha u$ 均在 $L^p_{loc}(\Omega)$中，$D^\alpha u$ 必为 u 的 L^p 中的强导数。

2.2 整数次Sobolev空间$W^{m,p}(\Omega)$的定义及其简单性质

定义1.3 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，记

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid \quad D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbf{Z}^n_+, |\alpha| \leqslant m\}, \tag{1.13}$$

其中 $D^\alpha u$ 表示 u 的 α 阶弱（或强）导数，对于 $v \in W^{m,p}(\Omega)$ 定义范数

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|v\|_{m,p,\Omega} = \|v\|_{m,p} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha v\|^p_{0,p}\Big)^{1/p},$$

$$\|u\|_{0,p,\Omega} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty; \tag{1.14}$$

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

$W^{m,p}(\Omega)$赋以范数(1.14)称为($L^p(\Omega)$上的m阶）Sobolev 空间。

现在来讨论$W^{m,p}(\Omega)$的一些简单性质。

定理1.2 $W^{m,p}(\Omega)$按通常方式定义加法和数乘运算，构成 Banach 空间。

证明 只需证明 $W^{m,p}(\Omega)$的完备性。设 u_k 是 $W^{m,p}(\Omega)$中的一个 Cauchy 序列，即

$$\|u_k - u_l\|_{m,p,\Omega} \to 0 \quad (k,l\to\infty).$$

由范数$\|u\|_{m,p,\Omega}$的定义知，对任意 $\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|\leqslant m$，

$$\|D^\alpha u_k - D^\alpha u_l\|_{0,p,\Omega} \to 0 \quad (k,l\to\infty),$$

即 $D^\alpha u_k$ 是$L^p(\Omega)$中的 Cauchy 序列。由 $L^p(\Omega)$的完备性，存在 $u_\alpha\in L^p(\Omega)$满足

$$\|D^\alpha u_k - u_\alpha\|_{0,p,\Omega} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

记 $u_{(0,0,\cdots,0)} = u$，易见 u_α 正是 u 的 α 阶弱导数。事实上，由弱导数 $D^\alpha u_k$ 的定义(1.8)，对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega u_k D^\alpha\varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (D^\alpha u_k)\varphi \mathrm{d}x, \quad |\alpha|\leqslant m.$$

令 $k\to\infty$，注意到 L^p 中的强收敛蕴涵弱收敛，我们得

$$\int_\Omega u D^\alpha\varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u_\alpha\varphi \mathrm{d}x.$$

再由 $D^\alpha u$ 的定义即知 $u_\alpha = D^\alpha u\in L^p(\Omega)$，$|\alpha|\leqslant m$。故 $u\in W^{m,p}(\Omega)$且

$$\|u_k - u\|_{m,p,\Omega}^p = \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha u_k - D^\alpha u|^p \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega |D^\alpha u_k - u_\alpha|^p \mathrm{d}x \to 0 \quad (k\to\infty). \ \blacksquare$$

定理1.3 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$W^{m,p}(\Omega)$是可分的。

证明 对任一函数 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，令 $Pu = \{D^\alpha u \mid |\alpha|\leqslant$

$m\}\in\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$与之对应.由定理1.2的证明可知$PW^{m,p}(\Omega)$是$\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$的闭子空间，且$W^{m,p}(\Omega)$与$PW^{m,p}(\Omega)$同构。已知当$1\leq p<\infty$时，$L^p(\Omega)$可分，从而乘积空间$\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$可分，其闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$可分，与$PW^{m,p}(\Omega)$同构的$W^{m,p}(\Omega)$也可分。 ❙

定理1.4 当$1<p<\infty$时，$W^{m,p}(\Omega)$是自反的.

证明 由定理1.2的证明知$W^{m,p}(\Omega)$与$\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$的闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$同构。当$1<p<\infty$时，$L^p(\Omega)$自反，其乘积空间$\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$自反；$\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$的闭子空间$PW^{m,p}(\Omega)$自反，与它同构的$W^{m,p}(\Omega)$也自反。 ❙

2.3 单位分解

在转向$W^{m,p}(\Omega)$的逼近定理之前，先来建立单位分解定理。后面将多次用到它，其基本作用是局部化，即把整体性质归结为局部性质，可以形象地称为“区域的分片”。

引理1.1 设$\Omega'\subset\subset\Omega$，则存在函数$\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$，满足

$$\begin{cases}0\leq\zeta(x)\leq 1, & x\in\Omega;\\ \zeta(x)=1, & x\in\Omega';\\ |D^\alpha\zeta|\leq C/(\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega))^{|\alpha|}, & x\in\Omega,\end{cases}\tag{1.15}$$

证明 记$d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$，定义开集

$$\Omega_1=\left\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,\mathrm{dist}(x,\Omega')<\frac{d}{3}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{x\in \boldsymbol{R}^n \mid \operatorname{dist}(x,\Omega')<\frac{2d}{3}\right\}.$$

ρ 为(1.9)定义 的 光 滑子. 取 $\varepsilon=d/3$，φ 为开集Ω_1的特征函数，即在Ω_1上φ取值为 1 ，在Ω_1外φ取值为 0 . 令

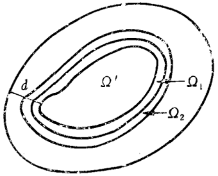


图 2

$$\zeta(x)=\varepsilon^{-n}\int_{R^n}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\int_{B_1(0)}\rho(z)\varphi(x-\varepsilon z)\,\mathrm{d}z. \tag{1.16}$$

设 $x\in\Omega'$，对任意$|z|<1$ 有 $x-\varepsilon z\in\Omega_1$，$\varphi(x-\varepsilon z)=1$. 故

$$\zeta(x)=\int_{B_1(0)}\rho(z)\,\mathrm{d}z=1.$$

类似可证 $x\overline{\in}\Omega_2$ 时 $\zeta(x)=0$. 故

$$\zeta\in C_0^\infty(\Omega),\quad 0\leqslant\zeta\leqslant\int_{B_1(0)}\rho(z)\,\mathrm{d}z=1.$$

若记 $\rho(z)=\rho(\lambda)$，$\lambda=|z|$，易知

$$D^\alpha\zeta(x)=\varepsilon^{-n}\int_{R^n}D_x^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \varepsilon^{-n}\varepsilon^{-|\alpha|}\int_{R^n}\frac{\mathrm{d}^{|\alpha|}\rho}{\mathrm{d}\lambda^{|\alpha|}}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \varepsilon^{-|\alpha|}\int_{R^n}\frac{\mathrm{d}^{|\alpha|}\rho}{\mathrm{d}\lambda^{|\alpha|}}(z)\varphi(x-\varepsilon z)\,\mathrm{d}z,$$

$$|D^\alpha\zeta(x)| \leqslant \varepsilon^{-|\alpha|}\int_{R^n}\left|\frac{\mathrm{d}^{|\alpha|}\rho}{\mathrm{d}\lambda^{|\alpha|}}(z)\right|\mathrm{d}z$$

$$= d^{-|\alpha|}3^{|\alpha|}\int_{R^n}\left|\frac{\mathrm{d}^{|\alpha|}\rho}{\mathrm{d}\lambda^{|\alpha|}}(z)\right|\mathrm{d}z = C_{n,|\alpha|}d^{-|\alpha|}. \quad \blacksquare$$

引理1.1中的函数 ζ 通常称为**截断函数**.

定理1.5 设 $\{\Omega_i \mid i=1,\cdots,N\}$ 是紧集 $K\subset \boldsymbol{R}^n$ 的有限开覆盖，则存在开集 $\Omega\supset K$ 和函数族 $\{\alpha_i \mid i=1,\cdots,N\}$ 满足

1) $\alpha_i\in C_0^\infty(\Omega_i)$;

2) $\alpha_i(x)\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x)=1$, $x\in\Omega$.

证明 记 $O=\bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, K 既然为紧集， $d=\operatorname{dist}(K,\partial\Omega)>0$，令

$$\Omega=\{x \mid \operatorname{dist}(x,K)<d/2\}.$$

显然 $\bar{\Omega}\subset O$，考虑 $\bar{\Omega}$ 的由球组成的覆盖

$$\mathscr{B}=\{B_{r(x)}(x) \mid x\in\Omega_i, i=1,\cdots,N, \overline{B_{r(x)}(x)}\subset\Omega_i\},$$

其中对每一点 $x\in\Omega_i$，选一适当半径 $r(x)>0$ 使 $\overline{B_{r(x)}(x)}\subset\Omega_i$，由有限覆盖定理知存在有限个球 $\{B_i \mid i=1,\cdots,I\}\subset\mathscr{B}$ 覆盖 $\bar{\Omega}$，令含于 Ω_i 的球 B_j 的并集为 $\tilde{\Omega}_i$，显然有

$$\overline{\tilde{\Omega}}_i=\bigcup_{B_j\subset\Omega_i}\bar{B}_j\subset\Omega_i, \quad \bar{\Omega}\subset\bigcup_{i=1}^N\tilde{\Omega}_i.$$

由引理1.1，可构造函数 $\beta_i\in C_0^\infty(\Omega_i)$，$0\leqslant\beta_i\leqslant1$，在 $\tilde{\Omega}_i$ 上 β_i

取值为 1，令

$$\alpha_1(x)=\beta_1(x),$$
$$\alpha_2(x)=(1-\beta_1(x))\beta_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_i(x)=(1-\beta_1(x))\cdots(1-\beta_{i-1}(x))\beta_i(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_N(x)=(1-\beta_1(x))\cdots(1-\beta_{N-1}(x))\beta_N(x),$$

容易验证

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x)=1-(1-\beta_1(x))\cdots(1-\beta_N(x))=1,\quad x\in\bigcup_{i=1}^{N}\bar{\Omega}_i. \ \blacksquare$$

定理1.6 设 Ω_i 是有界开集，$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$，$\Omega_i\subset\subset\Omega$，每一紧集 $K\subset\Omega$ 仅与有限个 Ω_i 相交，则存在函数族 $\{\alpha_i|i=1,\cdots,\infty\}$满足

1) $\alpha_i\in C_0^\infty(\Omega_i)$，$i=1,2,\cdots$;

2) $\alpha_i\geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i(x)=1$，$x\in\Omega$。

证明 我们先构造 Ω 的一个开覆盖$\{O_i|i=1,2,\cdots\}$满足 $\bar{O}_i\subset\Omega_i$，为此令

$$B_1=\Omega_1-\bigcup_{i>1}\Omega_i.$$

注意 $B_1=\bar{\Omega}_1-\bigcup_{i>1}\Omega_i$，从而 B_1 是一个闭集. 实际上，若 $x\in\bar{\Omega}_1-\bigcup_{i>1}\Omega_i$，由于$\bar{\Omega}_1\subset\Omega$，则$x\in\Omega-\bigcup_{i>1}\Omega_i$. 又$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\Omega_i$，故 $x\in\Omega_1$，这就证明了

$$\bar{\Omega}_1-\bigcup_{i>1}\Omega_i\subset\Omega_1-\bigcup_{i>1}\Omega_i.$$

反向的包含关系是显然的。闭集 $B_1 \subset \Omega_1$，取一开集

$$O_1 = \left\{ x \mid \operatorname{dist}(x, B_1) < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(B_1, \partial\Omega_1) \right\}.$$

显然有 $B_1 \subset O_1 \subset\subset \Omega_1$，$O_1$ 和 $\Omega_i (i>1)$ 组成 Ω 的开覆盖。设已做出 $O_i, i=1,2,\cdots,k-1$，满足 $O_i \subset\subset \Omega_i$，$O_i$ $(i=1,\cdots,k-1)$ 和 Ω_j $(j \geqslant k)$ 组成Ω的覆盖，令

$$B_k = \Omega_k - \bigcup_{i<k} O_i - \bigcup_{j>k} \Omega_j.$$

跟前面一样可证 B_k 是闭集，$B_k \subset \Omega_k$。与 O_1 类似，构造开集 $O_k \subset\subset \Omega_k$，使 O_i $(i \leqslant k)$ 和 Ω_j $(j>k)$ 组成 Ω 的开覆盖，由归纳法即得到满足要求的$\{O_i \mid i=1,\cdots,\}$。由引理1.1，存在函数 $\beta_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$，在 O_i 上 β 取值为 1，$0 \leqslant \beta_i \leqslant 1$。由于每一紧集 $K \subset \Omega$ 仅与有限个支集 $\operatorname{supp} \beta_i$ 相交，所以 $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \in C^\infty(R^n)$，且在 Ω 上 $\beta \geqslant 1, \alpha_i = \beta_i/\beta$即满足要求。∎

2.4 逼近

$W^{m,p}(\Omega)$的函数可用Ω上或 $\bar{\Omega}$ 上的光滑函数逼近，视边界$\partial\Omega$光滑与否而定。

定理1.7 设 $u \in W^{m,p}(\Omega)$，则存在序列 $u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$满足

$$\|u_k - u\|_{m,p,\Omega} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

证明 只需对任意正数 ε，构造函数 $w \in C^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$，满足$\|u-w\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon$。定义开集

$$\Omega_0 = \varnothing, \quad \Omega_i = \left\{ x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}, \ |x| < i \right\}.$$

显然 $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\Omega_{i+2} - \bar{\Omega}_i)$。任一紧集 K 仅与有限个开集

$(\Omega_{i+2}-\bar{\Omega}_i)$相交。由单位分解定理，存在相应单位分解

$$\{\alpha_i \mid i=0,1,\cdots\},\quad \alpha_i \geqslant 0,\quad \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = 1,\quad x \in \Omega.$$

令 $u=\sum_{i=0}^{\infty} u\alpha_i$，则

$$\operatorname{supp}(u\alpha_i) \subset \Omega_{i+2}-\bar{\Omega}_i \subset\subset \Omega,\quad u\alpha_i \in W^{m,p}(\Omega).$$

由定理1.1，取正数 ε_i 充分小，可使 $u\alpha_i$ 的光滑化 $J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 满足

$$\operatorname{supp} J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i) \subset \Omega_{i+2}-\bar{\Omega}_i,\ \|J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)-u\alpha_i\|_{m,p,\Omega} < \varepsilon/2^{i+1}.$$

令 $w=\sum_{i=0}^{\infty} J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$，由于 $J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i) \in C_0^{\infty}(\Omega)$，且任一紧集 K 仅与有限个支集 $\operatorname{supp} J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 相交，故 $w \in C^{\infty}(\Omega)$。由 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\|w-u\|_{m,p,\Omega} &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i) - \sum_{i=0}^{\infty} u\alpha_i \right\|_{m,p,\Omega} \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \|J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)-u\alpha_i\|_{m,p,\Omega} \\ &< \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \varepsilon. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

读者一定会觉察到，在上述证明中，对边界 $\partial\Omega$ 上的任一点 x_0，不论半径 r 多小，球 $B_r(x_0)$ 都与无穷多个开集 $\Omega_{i+2}-\bar{\Omega}_i$ 相交。级数 $\sum_{i=0}^{\infty} J_{\varepsilon_i}(u\alpha_i)$ 非零项的数目一般是无穷，因而该级数在边界点 x_0 的状态是不清楚的。为了得到直到边界都光滑的函数逼近，需要对边界上的光滑性加上某些限制。

定义1.4 设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ 为一开集，$\partial\Omega$ 为其边界。若对每点 $x_0 \in \partial\Omega$，存在一个邻域 O 和一个从 O 到 $B_1(0) \subset \boldsymbol{R}_y^n$ 的变换 φ:

$\varphi(x)=y$，满足

$$\varphi\in C^m(O),\ \varphi^{-1}\in C^m(B_1(O)),$$
$$\varphi(\Omega\cap O)=B_1^+(O)=B_1(O)\cap\{y_n>0\},$$
$$\varphi(\partial\Omega\cap O)=\Sigma=B_1(O)\cap\{y_n=0\},$$

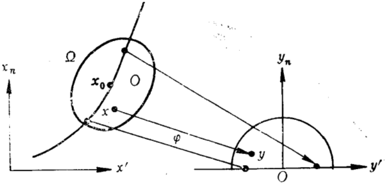


图 3

则说 $\partial\Omega\in C^m$. 若 φ 和 φ^{-1} 属于C^∞，则说 $\partial\Omega\in C^\infty$.

定理1.8 设 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 是有界开集，$\partial\Omega\in C^m$，$m\geqslant 1$ 为自然数，则对任意 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，存在序列 $u_k\in C^m(\bar\Omega)$满足

$$\|u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0\quad(k\to\infty).$$

证明 由$\partial\Omega\in C^m$的定义，注意到 Ω 有界时 $\partial\Omega$ 是有界闭集，利用有限覆盖定理，我们得到有限个区域$\{O_i\,|\,i=1,\cdots,N\}$和变换 $y=\varphi_i(x),i=1,\cdots,N$,满足

$$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^N O_i,\ \ \varphi_i,\varphi_i^{-1}\in C^m,\ \ \varphi_i(O_i)=B_1(0),$$
$$\varphi_i(O_i\cap\Omega)=B_1^+(O),\ \ \varphi_i(O_i\cap\partial\Omega)=\Sigma.$$

取 $O_0\subset\subset\Omega$ 满足 $\Omega\subset\bigcup_{i=0}^N O_i$ (图4)。由单位分解定理，存在

$\alpha_i\in C_0^\infty(O_i)$，$\sum_{i=0}^n\alpha_i(x)=1$，$x\in\Omega$，令

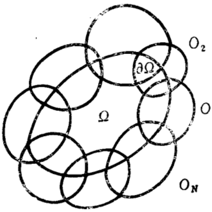


图 4

$$u = u\sum_{i=0}^{N} \alpha_i = \sum_{i=0}^{N} u\alpha_i = \sum_{i=0}^{N} u_i.$$

由本章习题 5 知 $u_i \in W^{m,p}(\Omega)$。令 u_0 在 Ω 外取零值的延拓为 $\tilde{u}_0$，显见 $\tilde{u}_0 \in W^{m,p}(R^n)$，作 $\tilde{u}_0$ 的光滑化

$$J_\varepsilon \tilde{u}_0(x) = \varepsilon^{-n}\int_{R^n} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\tilde{u}_0(y)\mathrm{d}y.$$

令 $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$，$u_{0k} = J_{1/k}\tilde{u}_0$。由定理1.1知

$$u_{0k} \in C_0^\infty(R^n), \quad \|u_{0k} - u_0\|_{m,p,\Omega} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

作变量替换

$$u_i(x) = u_i(\varphi^{-1}(y)) = v_i(y).$$

若 $u_i \in C^1(\Omega)$，则由复合函数求偏导数的链锁法则 $v_i \in C^1(B^1)$，且

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial y_k}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_l} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_l}, \tag{1.17}$$

其中重复指标表示从1至n求和，本书后面一直采用这个约定.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial v_i}{\partial y_k}\right\|_{0,p,B^+} &\leqslant C\sum_{l=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right\|_{0,p,B^+}\\ &= C\sum_{l=1}^{n}\left(\int_{B^+}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right|^p \mathrm{d}y\right)^{1/p}\\ &= C\sum_{l=1}^{n}\left(\int_{\Omega\cap O_i}\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right|^p\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &\leqslant C'\sum_{l=1}^{n}\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right\|_{0,p,\Omega\cap O_i},\end{aligned}$$

其中$\frac{\partial y}{\partial x}$表示$y=\varphi(x)$的 Jacobi 行列式. 类似地得到$\frac{\partial u_i}{\partial x_l}$用$\frac{\partial v_i}{\partial y_k}$的估计式，从而存在常数$C>0$使

$$C^{-1}\|v_i\|_{1,p,B^+}\leqslant\|u_i\|_{1,p,\Omega\cap O_i}\leqslant C\|v_i\|_{1,p,B^+}. \tag{1.18}$$

对一般的$u_i\in W^{1,p}(O_i\cap\Omega)$，由$C^\infty(\Omega)$逼近定理(定理1.7)知道存在序列$u_{ik}\in C^\infty(O_i\cap\Omega)$，满足

$$\|u_{ik}-u_i\|_{1,p,O_i\cap\Omega}\to 0\quad(k\to\infty).$$

由(1.18)知相应地有

$$\|v_{ik}-v_i\|_{1,p,B^+}\to 0\quad(k\to\infty).$$

对u_{ik}和v_{ik}写下(1.17)式，令$k\to\infty$过渡到极限即知(1.17)式对$u_i\in W^{1,p}(O_i\cap\Omega)$也成立，即我们证明了通常的链锁法则对弱导数成立，从而(1.18)成立。类似地可证其中的1换成m也成立。

把$v_i\in W^{m,p}(B^+)$的定义域扩充到$\boldsymbol{R}_+^n$，即令v_i在$\boldsymbol{R}_+^n-B^+$上为零. 注意到$\operatorname{supp}v_i\subset B$，易知扩充定义域后的函数

$\tilde{v}_i \in W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)$。由下面的引理1.2知存在$\tilde{v}_{ik} \in C^\infty(\bar{B}^+)$，满足

$$\operatorname{supp}\tilde{v}_{ik} \subset B, \quad \|\tilde{v}_{ik} - \tilde{v}_i\|_{m,p,B^+} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

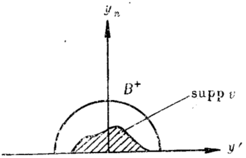


图 5

回到变量 x_1，利用(1.18)中的第二个不等式(1换为m)，即知存在 $u_{ik} \in C^m(\overline{O_i \cap \Omega})$满足

$$\operatorname{supp}u_{ik} \subset O_i, \quad \|u_{ik} - u_i\|_{m,p,O_i \cap \Omega} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

令 u_{ik} 在 $\Omega - \Omega_i$ 上为零，并令

$$u_k = \sum_{i=0}^{N} u_{ik}.$$

显然 $u_k \in C^m(\bar{\Omega})$，并且

$$\|u - u_k\|_{m,p,\Omega} = \left\| \sum_{i=0}^{N} (u_i - u_{ik}) \right\|_{m,p,\Omega}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{N} \|u_i - u_{ik}\|_{m,p,\Omega} \to 0 \quad (k \to \infty). \quad \blacksquare$$

从上面的证明体会到：由于单位分解，因子 α 的出现使函数有紧支集，并把区域由 Ω 转到 $\Omega \cap O_i$，此即所谓局部化，再由 $\partial\Omega \in C^m$中的变换 φ 把 $\Omega \cap O_i$ 转换成B^+，把$\partial\Omega \cap O_i$转换成 Σ，此即边界的平直化，或把边界拉平。

引理1.2 设 $u \in W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n_+)$，则存在 $u_k \in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}^n_+})$满足

$$\|u_k - u\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+} \to 0 \quad (k\to\infty).$$

若 supp u 含于某开集 O 中，可使 supp $u_k \subset O$.

证明 设 $u\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n_+)$，做其平移

$$u_\eta(x) = u(x', x_n+\eta), \quad x_n > -\eta, \quad x' = (x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

由 L^p 中平移连续性易知

$$\|u_\eta - u\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+} \to 0 \quad (\eta \to +0).$$

对 u_η 做光滑化

$$J_\varepsilon u_\eta(x) = \varepsilon^{-n}\int_{y_n>-\eta} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u_\eta(y)\mathrm{d}y.$$

由定理1.1知，只要 $\varepsilon < \eta/2$，就有 $J_\varepsilon u_\eta \in C^\infty(\{y_n > -\eta/2\})$ 并且

$$\|J_\varepsilon u_\eta - u_\eta\|_{m,p,\mathbf{R}^n_+} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0).$$

由以上两个极限关系容易得到所需之逼近。又若 supp $u\subset O$ 时，只要 η 和 ε 充分小就可使 supp $J_\varepsilon u_\eta \subset O$. ∎

我们看到在半空间情形，可利用平移以扩展定义域，这是把边界展平的好处之一。

2.5 延拓

边界 $\partial\Omega$ 光滑时，$W^{m,p}(\Omega)$ 可看作 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 在 Ω 上的限制，而 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 往往便于研究，这是因为 $\mathbf{R}^n$ 上定义的函数适宜进行 Fourier 变换。

定理1.9 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是有界区域，$\partial\Omega\in C^m$，则存在线性算子 P: $W^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ 满足

$$Pu(x) = u(x), \quad \text{a.e.}\ x\in\Omega;$$

$$\|Pu\|_{m,p,\mathbf{R}^n} \leqslant C\|u\|_{m,p,\Omega}, \quad C = C(n,m,\Omega).$$

证明 先设 $u\in C^m(\bar{\Omega})$，和定理1.8的证明一样取

$\{O_i|i=0,1,\cdots,N\}$，$\{a_i|i=0,1,\cdots,N\}$和$\{\varphi_i|i=1,\cdots,N\}$，同样定义 u_i 和 v_i 及 u_0 的延拓 $\tilde{u}_0$。以下列方式延拓 $v_i(y)=v(y)$：

$$\tilde{v}(y)=\begin{cases} v(y), & y\in B^+\cup\Sigma; \\ \sum_{j=1}^{m+1} c_j v(y',-y_{n/j}), & y=(y',y_n) \\ & \in B\cap\{y_n<0\}=B^-. \end{cases} \tag{1.19}$$

c_j 满足线性方程组

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j\left(-\frac{1}{j}\right)^k=1,\quad k=0,1,\cdots,m.$$

由于其系数组成 Vandermonde 行列式，易知这个行列式非零，故$c_j(j=1,\cdots,m+1)$存在。显然 $\tilde{v}\in C^m(B^+\cup B^-)$。对 $\alpha\in \boldsymbol{Z}_+^n$，$|\alpha|\leqslant m$，$y_0\in\Sigma$，

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in B^+}} D^\alpha\tilde{v}(y)=D^\alpha v(y_0),$$

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in B^-}} D^\alpha\tilde{v}(y)=\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in B^-}}\sum_{j=1}^{m+1} c_j\left(-\frac{1}{j}\right)^{\alpha_n} D^\alpha v\left(y',-\frac{y_n}{j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m+1} c_j\left(-\frac{1}{j}\right)^{\alpha_n} D^\alpha v(y_0)=D^\alpha v(y_0).$$

这就证明了 $\tilde{v}\in C^m(B)$。返回变量 x 即得 $\tilde{u}_i\in C^m(O_i)$。注意到$\tilde{u}_i$的支集在 O_i 内，令 $\tilde{u}_i$ 在 O_i 外取零值，延拓后的函数仍记为 $\tilde{u}_c$，则 $\tilde{u}_i\in C^m(\boldsymbol{R}^n)$。定义 u 的延拓

$$Pu=\sum_{i=0}^{N}\tilde{u}_i.$$

对 $x\in\Omega$ 有

$$(Pu)(x)=\sum_{i=0}^{N}\tilde{u}_i(x)=\sum_{i=0}^{N}u_i(x)=u(x).$$

由 Pu 的表达式知存在常数 $C=C(m,n,\Omega)$ 使

$$\|Pu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\leqslant C\|u\|_{m,p,\Omega}. \tag{1.20}$$

任给 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，由 $C^\infty(\bar{\Omega})$逼近定理（定理1.8），存在函数列 u_k 满足

$$u_k\in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \|u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0\ (k\to\infty).$$

对 $u_k\in C^\infty(\bar{\Omega})$，由前所述可作 Pu_k，由(1.20)

$$\|Pu_k-Pu_l\|_{m,p,\mathbf{R}^n}=\|P(u_k-u_l)\|_{m,p,\mathbf{R}^n}$$
$$\leqslant C\|u_k-u_l\|_{m,p,\Omega}\to 0\ (k,l\to\infty).$$

由 $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$的完备性，存在 $Pu\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$满足

$$\|Pu_k-Pu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}\to 0(k\to\infty).$$

由于 $Pu_k=u$，a.e.于 Ω，故 $\|u_k-Pu\|_{m,p,\Omega}\to 0(k\to\infty)$。由 $W^{m,p}(\Omega)$中极限的唯一性，知 $Pu=u$ 在 Ω 上几乎处处成立，并且

$$\|Pu\|_{m,p,\mathbf{R}^n}=\lim_{k\to\infty}\|Pu_k\|_{m,p,\mathbf{R}^n}$$
$$\leqslant C\lim_{k\to\infty}\|u_k\|_{m,p,\Omega}=C\|u\|_{m,p,\Omega}. \quad \blacksquare$$

定理1.10 设 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 或 $\Omega=\mathbf{R}^n_+$ 或 Ω 为有界开集，$\partial\Omega\in C^m$，$u\in W^{m,p}(\Omega)$，则存在 $u_k\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$满足$\|u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0(k\to\infty)$。

证明 当 Ω 有界且 $\partial\Omega\in C^m$ 时用延拓定理(定理1.9)；当 $\Omega=\mathbf{R}^n_+$ 时，用表达式(1.19)延拓 u 到 $\mathbf{R}^n$，总之存在 $v\in W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$，$v$ 在 Ω 上跟 u 重合。作 v 的光滑化

$$J_\varepsilon v(x)=\varepsilon^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)v(y)\mathrm{d}y.$$

由定理1.1，知 $J_\varepsilon v\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，并且

$$\|J_\varepsilon v - v\|_{m,p,\boldsymbol{R}^n} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

又对固定的$\varepsilon>0$，记$w = J_\varepsilon v$. 取截断函数

$$\zeta \in C_0^\infty(B_2(O)), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

在$B_1 = B_1(O)$上$\zeta = 1$. 令

$$w_k(x) = w\zeta\left(\frac{x}{k}\right),$$

则$w_k \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. 由求乘积导数的 Leibniz 公式(见本章习题 4)

$$D^\alpha w_k(x) = \sum \binom{\alpha}{\beta} D^\beta\left(\zeta\left(\frac{x}{k}\right)\right) D^{\alpha-\beta} w$$

$$= \zeta\left(\frac{x}{k}\right) D^\alpha w + \sum_{\substack{\beta \leqslant \alpha \\ |\beta| > 0}} \binom{\alpha}{\beta} k^{-|\beta|} (D^\beta \zeta)\left(\frac{x}{k}\right) D^{\alpha-\beta} w,$$

其中$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{Z}_+^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) \in \boldsymbol{Z}_+^n$, $\beta \leqslant \alpha$的意义是$\beta_i \leqslant \alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 而$\binom{\alpha}{\beta}$是

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}, \qquad \binom{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{\alpha_i!}{\beta_i!(\alpha_i - \beta_i)!}.$$

易见

$$\|D^\alpha w_k - D^\alpha w\|_{0,p,\boldsymbol{R}^n}$$

$$\leqslant \left(\int_{|x|>k} |D^\alpha w|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \frac{C}{k}\|w\|_{m,p,\boldsymbol{R}^n} \to 0 \, (k \to \infty). \quad \blacksquare$$

本节定理的证明体现了研究 Sobolev 空间的基本技巧：利用单位分解把区域“分片”；利用变量替换把边界展平；利用跟光滑子的卷积把函数“磨光”；利用乘截断函数把支集“截断”. 以上可分别简称为局部化，平直化，光滑化，紧支化.

2.6 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 和 $W^{-m,p}(\Omega)$

在 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 中求解偏微分方程时，我们把古典导数的概念推广到弱导数(或强导数)，通常还要求解在边界或部分边界上的前几阶导数值给定，利用引进辅助函数的办法一般可归结为零边值或齐次边值。但是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的函数只是在 Ω 上几乎处处定义的，那么它在边界上取零值是什么意思呢？在边界适当光滑时，边界上前 $m-1$ 阶法向导数取零值的函数，可以看作下面定义的 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中的元素。

定义1.5 $C_0^\infty(\Omega)$在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的闭包记作 $W_0^{m,p}(\Omega)$，即

$$W_0^{m,p}(\Omega)=\{u\in W^{m,p}(\Omega)\mid \exists\, u_k\in C_0^\infty(\Omega),\ \|u_k-u\|_{m,p,\Omega}\to 0\quad (k\to\infty)\}.$$

若 $\Omega=\boldsymbol{R}^n$，由定理1.10，$W_0^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)=W^{m,p}(\Omega)$。又若 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，我们就认为 u 在边界上取零值，从下列定理可以看出这是合理的。

定理1.11 设 Ω 是$\boldsymbol{R}^n$的有界区域，$\partial\Omega\in C^1$，$u\in C^0(\bar{\Omega})\cap W^{1,p}(\Omega)$，则下列两个性质等价

1) 在 $\partial\Omega$ 上 $u=0$。

2) $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$

证明 (1) 设1)成立，利用局部化和平直化，不妨认为，$u\in H^1(\boldsymbol{R}_+^n)\cap C^0(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$，$u$ 有紧支集并且 $u(x',0)=0$，$x'\in\boldsymbol{R}^{n-1}$。令 u 在 $x_n<0$时取零值，把 u 延拓到 $\boldsymbol{R}^n$，记延拓后的函数为 $\tilde{u}$，显然

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_n>0),\quad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}=0\ (x_n<0),\quad i=1,\cdots,n-1.$$

对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，

$$\int_{R^n} \tilde{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{x_n > \varepsilon} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx.$$

注意到对几乎所有的 $x' \in R^{n-1}$，$u(x', x_n)$ 作为 x_n 的函数在 $x_n \geq \varepsilon > 0$ 绝对连续(见本章习题 2)，我们有

$$\int_{R^n} \tilde{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[-\int_{R^{n-1}} (u\varphi)(x', \varepsilon) dx' - \int_{x_n > \varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_n} \varphi dx \right].$$

由于 $u \in C^0(\overline{R^n_+})$ 且有紧支集，$u(x', \varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to +0)$ 关于 $x' \in R^{n-1}$ 一致，故

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{R^{n-1}} (u\varphi)(x', \varepsilon) dx' = 0.$$

于是有

$$\int_{R^n} \tilde{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = -\int_{x_n > 0} \frac{\partial u}{\partial x_n} \varphi dx.$$

由弱导数定义，

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, & x_n > 0; \\ 0, & x_n < 0. \end{cases}$$

所以 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_n} \in L^p(R^n)$，从而 $\tilde{u} \in W^{1,p}(R^n)$。考虑平移

$$\tilde{u}_\eta(x) = \tilde{u}(x', y_n - \eta), \quad \eta > 0,$$

$\tilde{u}_\eta$ 的支集在 $x_n \geq \eta > 0$，作卷积

$$J_\varepsilon \tilde{u}_\eta(x) = \varepsilon^{-n} \int_{R^n} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \tilde{u}_\eta(y) dy.$$

当 $\varepsilon<\eta/2$ 时，$\operatorname{supp} J_\varepsilon \tilde{u}_\eta \subset \left\{x_n \geqslant \frac{\eta}{2}\right\}$，由 L^p 中平移连续性和定理1.1，有

$\|\tilde{u}_\eta - \tilde{u}\|_{1,p,R_+^n} \to 0 \quad (\eta \to +0)$，$\|J_\varepsilon \tilde{u}_\eta - \tilde{u}_\eta\|_{1,p,R_+^n} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$。由此可定义序列 $u_k \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}_+^n)$ 满足 $\|u_k - u\|_{1,p,R_+^n} \to 0 (k \to \infty)$，即 $u \in W_0^{1,p}(R_+^n)$。

(2) 设 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$，要证在古典意义下 u 在边界 $\partial\Omega$ 上取零值。跟(1)一样，问题归结为 $\Omega = B^+$ 的情形。由 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的定义存在 $u_k \in C_0^\infty(B^+)$ 满足

$$\|u_k - u\|_{1,p,B^+} \to 0 \quad (k \to \infty).$$

对 a.e. $x' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$，我们有

$$u_k(x',\varepsilon) - u(x',\varepsilon) = -\int_\varepsilon^1 \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x',x_n) - \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',x_n)\right] \mathrm{d}x_n.$$

由 Minkowski 不等式

$$\left(\int_{|x'|<1} |u_k(x',\varepsilon) - u(x',\varepsilon)|^p \mathrm{d}x'\right)^{1/p} \leqslant \int_\varepsilon^1 \left(\int_{|x'|<1} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x',x_n) - \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',x_n)\right|^p \mathrm{d}x'\right)^{1/p} \mathrm{d}x_n.$$

对右端关于 x_n 的积分用 Hölder 不等式得

$$\left(\int_{|x'|<1} |u_k(x',\varepsilon) - u(x',\varepsilon)|^p \mathrm{d}x'\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{B^+} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n} - \frac{\partial u}{\partial x_n}\right|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

任给 $\delta>0$，取定 k 充分大使右端不超过 δ，由于 $u_k \in C_0^\infty(B^+)$，存在正数 ε_0，当 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 时 $u_k(x^1,\varepsilon) = 0$，$|x'|<1$，故

$$\left(\int_{|x'|<1}|(u(x',\varepsilon)|^p\mathrm{d}x'\right)^{1/p}<\delta.$$

令 $\varepsilon\to0$ 取极限得

$$\int_{|x'|<1}|u(x',0)|^p\mathrm{d}x'<\delta^p.$$

由$\delta>0$的任意性，上式左端为零，再由 u 的连续性可知 u 在 Σ 上恒等于零。 ▌

定义1.6 设m是自然数，$1<p<\infty$，$1/p+1/p'=1$，定义

$$W^{-m,p'}(\Omega)=(W_0^{m,p}(\Omega))',$$

这里 B' 表示 Banach 空间 B 的对偶空间。

我们来探讨 $W^{-m,p'}(\Omega)$中元素的结构。

定理1.12 对任一 $f\in W^{-m,p'}(\Omega)$，存在 $\{\tilde{f}_\alpha|_{|\alpha|\leq m}\}\in\prod_{|\alpha|\leq m}L^{p'}(\Omega)$满足

$$f=D^\alpha\tilde{f}_\alpha,\quad 在\mathscr{D}'(\Omega)中$$

或

$$(f,u)=f(u)=(-1)^{|\alpha|}\int\tilde{f}_\alpha D^\alpha u\mathrm{d}x\quad\forall u\in W_0^{m,p}(\Omega).\tag{1.22}$$

证明 由于 $f\in W^{-m,p'}(\Omega)$，可在 $\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$ 的一个子空间上定义有界线性泛函

$$F(\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leq m\})=f(u),\quad\forall u\in W_0^{m,p}(\Omega).$$

令 $Pu=\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leq m\}$，$PW_0^{m,p}(\Omega)$ 是 $\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)$ 的一个闭子空间，

$$|F(Pu)|=|f(u)|\leq\|f\|\|u\|_{m,p,\Omega}=\|f\|\ \|Pu\|_{\prod_{|\alpha|\leq m}L^p(\Omega)}.$$

由 Hahn-Banach 定理存在 $\tilde{F}\in\left(\prod_{|\alpha|\leqslant m}L^p(\Omega)\right)'$ 满足

$$\tilde{F}(Pu)=F(Pu),\ 且\ \|\tilde{F}\|=\|F\|.$$

由 $\left(\prod_{|\alpha|\leqslant m}L^p(\Omega)\right)'$ 的表示定理，存在

$$\{f_\alpha\,|\,|\alpha|\leqslant m\}\in\prod_{|\alpha|\leqslant m}L^{p'}(\Omega),$$

满足

$$\tilde{F}(\{u_\alpha\,|\,|\alpha|\leqslant m\})=\int_\Omega u_\alpha f_\alpha\mathrm{d}x,$$

$$\forall\{u_\alpha\,|\,|\alpha|\leqslant m\}\in\prod_{|\alpha|\leqslant m}L^p(\Omega).$$

特别地

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leqslant m\})&=F(\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leqslant m\})=(fu)\\&=\int_\Omega D^\alpha u f_\alpha\mathrm{d}x,\ \forall u\in W_0^{m,p}(\Omega).\end{aligned}$$

特别取 $u\in C_0^\infty(\Omega)$，由广义导数定义即知

$$f=(-1)^\alpha D^\alpha f_\alpha.$$

令 $\tilde{f}_\alpha=(-1)^{|\alpha|}f_\alpha$，即得(1.21)式。 ∎

2.7 嵌入

嵌入性质是 Sobolev 空间的最重要的性质，正是这一性质使得 Sobolev 空间在近代偏微分方程理论中起着重要的作用，这一性质揭示了弱可微性和可积性、连续性的关系。

定理1.13 1) 若 $1\leqslant p<n$，则 $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$，

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

2) 若 $\infty \geqslant p > n$，则 $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\gamma(\bar{\Omega})$，$\gamma = 1 - \frac{n}{p}$。

定理中的符号 $A \hookrightarrow B$ 表示 $A \subset B$，且 $\|u\|_B \leqslant C\|u\|_A$，$\forall u \in A$，$C$ 与 u 无关，这时说 A 连续嵌入 B。

证明 1) 设 $1 \leqslant p < n$，$u \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x) \mathrm{d}x_i, \; |u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| \mathrm{d}x_i,$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

$p = 1$ 时相应 $q = \frac{n}{n-1}$。

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |D_i u| \mathrm{d}x_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

不等式两端对 x_1 积分，并利用 $n-1$ 个因子的 Hölder 不等式(指数皆为 $n-1$)得

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u_1| \mathrm{d}x_1\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_2 u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_R u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

两端对 x_2 积分，类似地得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_1 u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_2 u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |D_3 u| \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdots$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_n u|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

直到第 n 步得到

$$\int_{R^n}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{R^n}|D_i u|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

两端取$\dfrac{n-1}{n}$次方

$$\|u\|_{L^{q_1}(R^n)}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_{R^n}|D_i u|\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}},\quad q_1=\frac{n}{n-1}.$$

由于几何平均数不超过算术平均数，所以

$$\|u\|_{L^{q_1}(R^n)}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{R^n}|D_i u|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{R^n}|Du|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}}\|Du\|_{L^1(R^n)},\tag{1.23}$$

其中

$$|Du|=(|D_1u|^2+\cdots+|D_nu|^2)^{1/2}.$$

在不等式(1.23)中取 u 为 $|u|^\gamma$，$\gamma>1$，我们得到

$$\||u|^\gamma\|_{L^{n/(n-1)}(R^n)}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\|\gamma|u|^{\gamma-1}|Du|\|_{L^1(R^n)}.$$

对右端利用 Hölder 不等式

$$\|u\|^{\gamma}_{L^{\gamma n/(n-1)}(R^n)}=\||u|^\gamma\|_{L^{n/(n-1)}(R^n)}$$

$$\leqslant\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\||u|^{\gamma-1}\|_{L^{p'}(R^n)}\|Du\|_{L^p(R^n)}$$

$$=\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|u\|^{\gamma-1}_{L^{p'(\gamma-1)}(R^n)}\|Du\|_{L^p(R^n)}.$$

取 γ 满足

$$\gamma n/(n-1)=(\gamma-1)p/(p-1),$$

$$\gamma=\frac{p(n-1)}{n-p}>1(当\ n>p时),$$

我们得到

$$\|u\|_{L^{np/(n-p)}(R^n)}\leqslant\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\|Du\|_{L^p(R^n)}.$$

利用逼近推理可证此式对任意 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ 皆成立。

2) 设 $p>n$, $u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$, Ω_ρ 为边长为 $\rho>0$ 边平行于坐标轴且包含原点的立方体。由 Newton–Leibniz 公式，对 $\forall x\in\Omega$,

$$|u(x)-u(0)|=\left|\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(tx)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^1 D_iu(tx)x_i\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\sqrt{n}\,p\int_0^1|Du(tx)|\,\mathrm{d}t.$$

两端在 Ω_ρ 上积分，并除以 Ω_ρ 的体积 ρ^n 得

$$\left|\frac{1}{\rho n}\int_{\Omega_\rho}u(x)\mathrm{d}x-u(0)\right|\leqslant\frac{1}{\rho n}\int_{\Omega_\rho}|u(x)-u(0)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{n}}{\rho^{n-1}}\int_0^1 dt\int_{\Omega_\rho}|Du(tx)|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\rho^{n-1}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^n}\int_{\Omega_{t\rho}}|Du(y)|\mathrm{d}y,$$

其中

$$\Omega_{t\rho}=\{tx\,|\,x\in\Omega_\rho\}.$$

对关于 y 的积分利用 Hölder 不等式得

$$\left|\frac{1}{\rho^n}\int_{\Omega_\rho}u(x)\mathrm{d}x-u(0)\right|$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{n}}{\rho^{n-1}}\int_0^1 \frac{1}{t^n}\| Du \|_{L^p(R^n)}(t\rho)^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} dt$$

$$= \sqrt{n}\, \rho^{1-\frac{n}{p}}\int_0^1 \frac{dt}{t^{n/p}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,p}{p-n}\rho^{1-\frac{n}{p}}.$$

对任意两点 $x\neq y$，$\rho=|x-y|$，总可以取一个边长为 2ρ 的边平行于坐标轴的立方体 $\Omega_{2\rho}$ 使 x,y 为其内点，由刚证的结果

$$\left|u(x)-\frac{1}{(2\rho)^n}\int_{\Omega_{2\rho}} u(z)dz\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}\,p}{p-n}(2\rho)^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(R^n)},$$

$$\left|u(y)-\frac{1}{(2\rho)^n}\int_{\Omega_{2\rho}} u(z)dz\right|\leqslant\frac{\sqrt{n}\,p}{p-n}(2\rho)^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p(R^n)},$$

$$|u(x)-u(y)|\leqslant\frac{2\sqrt{n}\,p}{p-n}(2\rho)^{1-\frac{n}{p}}=C\rho^{1-\frac{n}{p}}=C|x-y|^{1-\frac{n}{p}}. \tag{1.24}$$

设 $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$，取 $u_k\in C_0^\infty(\Omega)$满足

$$\|u_k-u\|_{1,p,\Omega}\to 0\quad(k\to\infty).$$

令 u_k 在 Ω 外取零值，则 $u_k\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$。由(1.24)

$$|u_k(x)-u_k(y)|\leqslant C\|Du_k\|_{L^p(\Omega)}|x-y|^{1-\frac{n}{p}}.$$

这说明在任何 $\Omega'\subset\subset\Omega$ 上，$\{u_k\}$一致有界并且等度一致连续，由 Arzela 定理，存在子序列 u_{k_i}满足

$$u_{k_i}(x)\to v(x),\quad i\to\infty,\ 在\ \Omega'\subset\subset\Omega\ 上一致,$$

v 满足

$$|v(x)-v(y)|\leqslant C\|Du\|_{L^p(\Omega)}|x-y|^{1-\frac{n}{p}}.$$

由 $\|u_k - u\|_{1,p,\Omega} \to 0$ $(k\to\infty)$可知，u_k 有子序列（仍记为 u_{k_i}）满足

$$u_{k_i} \to u, \quad \text{a.e. 于 } \Omega.$$

于是 $u=v$, a.e. 于 Ω，$v\in C^\gamma(\Omega)$，u 等价于 v，这就是 $u\in C^\gamma(\Omega)$的含意。 ▌

§3 $L^2(R^n)$中的 Fourier 变换

现在开始讨论分数次 Sobolev 空间和迹算子，这些问题在 $W^{m,2}(\Omega)$中探讨起来方便得多，而且后面基本上是在 $W^{m,2}(\Omega)$中研究偏微分方程。记 $W^{m,2}(\Omega)$为 $H^m(\Omega)$。首先考察 $\Omega=R^n$ 的情形，这时的基本工具是$L^2(R^n)$中的Fourier 变换。

定义1.7 称函数集

$\mathscr{S}=\{u\in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)\mid \forall \alpha,\beta\in \boldsymbol{Z}_+^n, |x^\beta D^\alpha u|\leqslant M_{\alpha\beta}, \forall x\in \boldsymbol{R}^n\}$.

为速降函数集，$\mathscr{S}$中的函数为速降函数。

显然 $C_0^\infty\subset\mathscr{S}$。易证 $\mathrm{e}^{-|x|^2}\in\mathscr{S}$。若 $u\in\mathscr{S}$，则对任意重指标 α 和 β 有 $x^\beta D^\alpha u\in\mathscr{S}$。又对任意自然数 m 有 $u(x)|\leqslant C|x|^{-m}$。

定义 1.8 对 $u\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，称函数

$$\hat{u}(\xi)=Fu(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x$$

为 u 的 Fourier 变换，其中的积分区域为 $\boldsymbol{R}^n$（后面凡未指明积分区域的，都认为积分区域是 $\boldsymbol{R}^n$），而 $x\xi\equiv x\cdot\xi=x_i\xi_i$。

$\mathscr{S}$对于 Fourier 变换的好处在于它对 Fourier 变换是封闭的。

定理1.14 若 $u\in\mathscr{S}$，则 $\hat{u}\in\mathscr{S}$。

证明 设 $u\in\mathscr{S}$，在积分号下求微商得

$$D_\xi^\alpha\hat{u}(\xi)=(2\pi)^{-n/2}\int(-i)^{|\alpha|}x^\alpha u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha\hat{u}(\xi)=|(2\pi)^{-n/2}\int\xi^\beta x^\alpha u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x|$$

$$=|(2\pi)^{-n/2}\int x^\alpha u(x)D_x^\beta(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi})\,\mathrm{d}x|.$$

分部积分，注意到 $x^\alpha u(x)$ 的速降性，有

$$|\xi^\beta D_\xi^\alpha\hat{u}(\xi)|=\left|(2\pi)^{-n/2}\int D_x^\beta(x^\alpha u(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M.$$

故 $\hat{u}\in\mathscr{S}$。 ▎

定理1.15 若 $u\in\mathscr{S}$，则

$$u(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

这个公式称为 Fourier 变换的反演公式，它可以表示为

$$u(x)=(\hat{u})^\wedge(-x),\quad \check{u}(x)\equiv u(-x)=(\hat{u})^\wedge(x).$$

证明 先证对任意 $u,v\in\mathscr{S}$ 有

$$\int\hat{u}(\xi)v(\varepsilon\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi=\int u(x+\varepsilon y)\hat{v}(y)\,\mathrm{d}y. \quad (1.25)$$

由 $\hat{u}$ 的定义

$$(1.25)\text{式左端}=\int v(\varepsilon\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\int(2\pi)^{-n/2}u(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi,$$

由 Fubini 定理交换积分次序得

$$(1.25)\text{式左端}=\iint(2\pi)^{-n/2}v(\varepsilon\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-x)\xi}\,\mathrm{d}\xi\,u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint(2\pi)^{-n/2}v(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{y-x}{\varepsilon}t}\varepsilon^{-n}\,\mathrm{d}t\,u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int\hat{v}\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-n}u(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int \hat{v}(y) u(x+\varepsilon y) \mathrm{d} y = (1.25)\text{式右端}.$$

现在取 $v(x)=\mathrm{e}^{-|x|^2/2} \in \mathscr{S}$，则其 Fourier 变换

$$\begin{aligned}
\hat{v}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int \mathrm{e}^{-|x|^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x \xi} \, \mathrm{d} x \\
&= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \int_{R^1} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2} - \mathrm{i} t \xi_j} \mathrm{d} t \\
&= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \int_{R^1} \mathrm{e}^{-(t+\mathrm{i}\xi_j)^2/2} \mathrm{e}^{-\xi_j^2/2} \mathrm{d} t \\
&= (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\xi_j^2/2} \int_{R^1} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d} t \right) \\
&= (2\pi)^{-n/2} \mathrm{e}^{-|\xi|^2/2} (2\pi)^{n/2} = \mathrm{e}^{-|\xi|^2/2}.
\end{aligned}$$

将这个 v 代入等式(1.25)，得

$$\int \hat{u}(\xi) \mathrm{e}^{-\varepsilon^2 |\xi|^2/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi} \, \mathrm{d} \xi = \int \mathrm{e}^{-|y|^2/2} u(x+\varepsilon y) \mathrm{d} y.$$

两端被积函数分别被 $|\hat{u}(\xi)|$ 和 $M \mathrm{e}^{-|y|^2/2}$ 所控制，由 Lebesgue 控制收敛定理，令 $\varepsilon \to 0$，在积分号下取极限得

$$\int \hat{u}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i} x \xi} \, \mathrm{d} \xi = \int u(x) \mathrm{e}^{-|y|^2/2} \mathrm{d} y = (2\pi)^{n/2} u(x),$$

即反演公式成立。 ▎

推论1.1 对任意 $u, v \in \mathscr{S}$ 有

$$\int \hat{u} v \, \mathrm{d} x = \int u \hat{u} \, \mathrm{d} x. \tag{1.26}$$

证明 在等式(1.25)中，令 $x=0$，$\varepsilon=1$ 即得。 ▎

定理1.16 对任意 $u, v \in \mathscr{S}$，有 Parseval 等式

$$\|\hat{u}\|_{L^2(R^n)} = \|u\|_{L^2(R^n)}, \qquad (u, v) = \int u \bar{v} \, \mathrm{d} x = (\hat{u}, \hat{v}) = \int \hat{u} \bar{\hat{v}} \, \mathrm{d} \xi. \tag{1.27}$$

证明 在等式(1.26)中，取 $\hat{v} = \bar{u}$，则由反演公式

$$v(x) = (2\pi)^{-n/2}\int \bar{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$
$$= (2\pi)^{-n/2}\overline{\int u(\xi) e^{-ix\xi} d\xi} = \bar{\hat{u}}(x).$$

故

$$\int \hat{u}\bar{\hat{u}} d\xi = \int u\bar{u} dx, \quad \|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)}.$$

类似地可证第二式。 ▎

3.2 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的 Fourier 变换

我们已在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的一个稠密子集$\mathscr{S}$上定义了一个保持范数的 Fourier 变换，由通常的线性算子扩张的办法即可在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上定义 Fourier 变换。

引理1.3 $\mathscr{S}$在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中是稠密的。

证明 实际上由定理1.10，$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$在$H^0(\boldsymbol{R}^n) = L^2(\boldsymbol{R}^n)$中稠密，而 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n) \subset \mathscr{S}$，故$\mathscr{S}$在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中稠密。 ▎

定理1.17 定义在$\mathscr{S}$上的 Fourier 变换可扩张为 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$到 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$上的 Fourier 变换，且反演公式、等式(1.26)和 Parseval 等式仍成立。

证明 任取 $u \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，由$\mathscr{S}$在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的稠密性，存在 $u_k \in \mathscr{S}$使 $\|u_k - u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} \to 0 (k \to \infty)$。由$\mathscr{S}$上的 Parseval 等式

$\|\hat{u}_k - \hat{u}_l\|_{L^2} = \|(u_k - u_l)^\wedge\|_{L^2} = \|u_k - u_l\|_{L^2} \to 0 \ (k, l \to \infty)$，
其中 $L^2 = L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$\hat{u}_k$是$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的Cauchy 序列。由$L^2(\boldsymbol{R}^n)$的完备性，存在 $\hat{u} \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$满足

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

在(1.26)中令 $u = u_k$，我们得

$$\int \hat{u}_k v dx = \int u_k \hat{v} dx, \quad \forall v \in \mathscr{S}.$$

令$k\to\infty$得

$$\int \hat{u} v \mathrm{d}x=\int u\hat{v}\mathrm{d}x,\quad \forall v\in\mathscr{S}. \tag{1.28}$$

由此式即得$\hat{u}$的唯一性，因若$\hat{u}_1$和$\hat{u}_2$都满足上式，差$\hat{u}_1-\hat{u}_2$满足

$$\int(\hat{u}_1-\hat{u}_2)v\mathrm{d}x=0,\quad \forall v\in\mathscr{S}.$$

由$\mathscr{S}$在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的稠密性即知$\hat{u}_1-\hat{u}_2=0$。在(1.28)中令$v=v_k$，这里v_k在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中趋于v，且$v_k\in\mathscr{S}$。再令$k\to\infty$取极限即知(1.26)式对任意$u,v\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$皆成立。类似可证反演公式在下述意义下成立，

$$(\hat{u})^\wedge=\check{u}, \tag{1.29}$$

其中两次Fourier变换都是在$L^2(\boldsymbol{R}^n)$意义下取的，$\check{u}$由$\check{u}(x)=u(-x)$定义。

$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的Fourier变换是映上的.因任给$v\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，令$u(\check{v})^\wedge$，由反演公式(1.29)，必有$\hat{u}=\check{\check{v}}=v$。∎

容易验证当$u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)\cap L^1(\boldsymbol{R}^n)$时由定理1.17定义的$L^2(\boldsymbol{R}^n)$中的Fourier变换跟$L^1$中定义的是一致的。

§4 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$

4.1 空间$H^s(\boldsymbol{R}^n)$的定义和逼近性质

从现在开始，我们基本上只讨论$L^2(\Omega)$上的Sobolev空间，把$W^{m,2}(\Omega)$记为$H^m(\Omega)$，相应范数记为$\|\ \ \|_m$。先对$\Omega=\boldsymbol{R}^n$定义正实数次空间，为此先借助Fourier变换把$H^m(\boldsymbol{R}^n)$中的范数转换成一个便于推广的形式。

引理1.4 设$u,D^\alpha u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$(D^\alpha u)^\wedge(\xi)=\mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{u}(\xi). \qquad (1.30)$$

又若 $u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$\hat{u}\xi^\alpha\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则弱导数 $D^\alpha u$ 存在且属于 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$。

证明　由弱导数定义，对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$

$$\int(D^\alpha u)\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int uD^\alpha\varphi\mathrm{d}x. \qquad (1.31)$$

对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$，令 $\varphi_k=\varphi\zeta\left(\frac{x}{k}\right)$，其中 $\zeta\left(\frac{x}{k}\right)$ 为截断函数。(1.31)中的 φ 换为 $\varphi_k\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，由于 $k\to\infty$ 时，在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中 φ_k 和 $D^\alpha\varphi_k$ 分别趋于 φ 和 $D^\alpha\varphi$，故(1.31) 对 $\varphi\in\mathscr{S}$ 亦成立。由 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中 Fourier 变换的性质

$$\begin{aligned}\int\widehat{D^\alpha u}\varphi\mathrm{d}x&=\int D^\alpha u\hat{\varphi}\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int uD^\alpha\hat{\varphi}\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int u(x)D_x^\alpha\left((2\pi)^{-n/2}\int\varphi(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int u(x)(2\pi)^{-n/2}\\&\quad\times\int\varphi(\xi)(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{i}^{|\alpha|}\int\hat{u}(\xi)\xi^\alpha\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

由于 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密，等式(1.30)得证。引理的第 2 个断言留作习题。▎

今设 $u\in H^m(\boldsymbol{R}^n)$，$m$ 为非负整数，由上述引理

$$\forall\,|\alpha|\leqslant m,\quad(D^\alpha u)^\wedge(\xi)=\mathrm{i}^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{u}(\xi).$$

由 Parseval 等式

$$\|u\|_m^2=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|D^\alpha u\|_0^2=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|\widehat{D^\alpha u}\|_0^2$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq m} \|\xi^\alpha \hat{u}\|_0^2 = \int \sum_{|\alpha|\leq m} |\xi^\alpha|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

由多项式展开定理

$$(1+|\xi|^2)^m = (1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^m$$

$$= \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_n=m} \frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1!\cdots\alpha_n!} \xi_1^{2\alpha_1}\cdots\xi_n^{2\alpha_n}.$$

易得

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (\xi^\alpha)^2 \leqslant (1+|\xi|^2)^m \leqslant C \sum_{|\alpha|\leq m} (\xi^\alpha)^2.$$

于是

$$C^{-1}\int (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant \|u\|_m^2 \leqslant \int (1+|\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.32}$$

定义1.9 对非负实数 s 定义

$$H^s(\boldsymbol{R}^n) = \{u \in L^2(\boldsymbol{R}^n) \mid (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\boldsymbol{R}^n)\},$$

$$\|u\|_s = \|u\|_{s,\boldsymbol{R}^n} = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_0,$$

$$(u,v)_s = \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}\bar{\hat{v}} d\xi.$$

我们提醒一下

$$\|u\|_0 = \|u\|_{0,\boldsymbol{R}^n} = \|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^n)} = \left(\int |u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

由前面的讨论知道，s 为非负整数 m 时，$H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 的定义与原来的定义一致。

定理1.10表明 $H_0^m(\boldsymbol{R}^n) = H^m(\boldsymbol{R}^n)$。对 $s \geqslant 0$ 我们给出

定理1.18 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$在 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$中稠密。

证明 首先证明$\mathscr{S}$在 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$中稠密。定义 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$到 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$的变换

$$v = T^s u = F^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}),$$

其中 F^{-1} 表示 Fourier 变换的逆变换。由 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 范数的定义和 Parseval 等式，有

$$\|u\|_s = \|T^s u\|_0.$$

T^s 的逆变换为 T^{-s}。注意 $T^s\mathscr{S}\subset\mathscr{S}$，$T^{-s}\mathscr{S}\subset\mathscr{S}$。给定 $u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，由于 $\mathscr{S}$ 在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密，任给 $\varepsilon>0$，存在 $v\in\mathscr{S}$，使 $\|T^s u - v\|_0<\varepsilon$，这时

$$\|u - T^{-s}v\|_s = \|T^s(u - T^{-s}v)\|_0 = \|T^s u - v\|_0 < \varepsilon,$$

其中 $T^{-s}v\in\mathscr{S}$。$\mathscr{S}$ 在 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 中的稠密性得证。再证 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}$ 中关于范数 $\|\ \ \|_s$ 稠密。由定理 1.10，对自然数 m，$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}$ 中关于范数 $\|\ \ \|_m$ 稠密，关于范数 $\|\ \ \|_s$ "更"稠密。 ▌

定义1.10 对 $s<0$，定义 $H^s(\boldsymbol{R}^n) = (H^{-s}(\boldsymbol{R}^n))'$。

定理1.19 若 $s<0$，$u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，则存在 $\hat{u}$，满足

$$\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

对任意 $\varphi\in\mathscr{S}$ 有

$$\int\hat{u}\varphi = u(\check{\varphi}),\ \|u\|_s = \|(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}\|_0. \qquad (1.33)$$

证明 对 $s<0$，$u\in H^s(\boldsymbol{R}^n) = (H^{-s}(\boldsymbol{R}^n))'$，考虑定义在 $\mathscr{S}$ 上的线性泛函 $L(\varphi) = u(\check{\varphi})$，我们有

$$\begin{aligned}|L(\varphi)| &= |u(\check{\varphi})| \leqslant \|u\|_s\|\check{\varphi}\|_{-s} = \|u\|_s\|\hat{\check{\varphi}}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_0\\ &= \|u\|_s\|\check{\check{\varphi}}(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_0 = \|u\|_s\|\varphi(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_0\\ &= \|u\|_s\|\varphi\|_{L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)},\end{aligned}$$

其中 $L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)$ 表示关于权函数 $\rho = (1+|\xi|^2)^{-s}$ 的 L^2 空间。因 $\mathscr{S}$ 在 $L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)$ 中稠密，L 可从 $\mathscr{S}$ 以唯一方式扩张到 $L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)$ 上，$\|L\|_{(L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n))'}\leqslant\|u\|_s$。由 $L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)$ 中有界线性泛函表示定理，存在 $v\in L^2_\rho(\boldsymbol{R}^n)$ 使

$$\|v\|_{L^2_\rho(R^n)} = \|L\|_{(L^2_\rho(R^n))'},$$

$$L(\varphi) = \int v\varphi(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi, \quad \forall \varphi \in L^2_\rho(R^n).$$

令 $\hat{u}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s}v$，则

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u} = (1+|\xi|^2)^{-s/2}v \in L^2(R^n),$$

同时

$$\|\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\|_0 = \|v\|_{L^2_\rho} = \|L\|_{(L^2_\rho(R^n))'} \leqslant \|u\|_s.$$

另一方面，对任意 $\varphi \in \mathscr{S}$，由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|u(\phi)| = |L(\varphi)| = \left|\int v\varphi(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right|$$

$$\leqslant \|v\|_{L^2_\rho(R^n)} \|\varphi\|_{L^2_\rho(R^n)}$$

$$= \|v\|_{L^2_\rho(R^n)} \|\varphi(1+|\xi|^2)^{-s/2}\|_0 = \|v\|_{L^2_\rho(R^n)} \|\phi\|_{-s},$$

$$\|u\|_s \leqslant \|v\|_{L^2_\rho(R^n)} = \|\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\|_0.$$

故 $$\|u\|_s = \|\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\|_0. \quad \blacksquare$$

定理中对 $u \in H^s(R^n)(s<0)$ 定义的函数 $\hat{u}$ 自然可以定义为 u 的 Fourier 变换，同时看出对任意实数 s，范数 $\|\ \ \|_s$ 有相同的表达式。

4.2 $H^s(R^n)$ 的嵌入定理

在2.7中我们讨论了 $W^{1,p}_0(\Omega)$ 的嵌入性质，现对任意实数 s 和 $\Omega = R^n$，我们证明 $H^s(R^n)$ 的类似性质。

定理1.20 设 $s = m + \frac{n}{2} + \lambda$，$\lambda \in (0,1)$，$m \in Z_+$，则

$$H^s \hookrightarrow C^{m+\lambda}(R^n),$$

且对任意 $u \in H^s(R^n)$ 有

$$|D^\alpha u(x)| \to 0 \ (|x| \to +\infty), \quad \forall \alpha \in Z^n_+, |\alpha| \leqslant m.$$

证明 设 $u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，由定义知 $\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$。由反演定理得

$$u(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}(1+|\xi|^2)^{-s/2}e^{ix\xi}\,d\xi.$$

以下将证明 $\hat{u}\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，所以在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$意义下的 Fourier 逆变换与 $L^1(\boldsymbol{R}^n)$意义下的 Fourier 逆变换一致。在积分号下求微商

$$D^\alpha u(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}\times(1+|\xi|^2)^{-s/2}i^{|\alpha|}\xi^\alpha e^{ix\xi}\,d\xi.$$

当 $|\alpha|\leqslant m$ 时，若 $|\xi|>1$ 则有

$$|(1+|\xi|^2)^{-s/2}\xi^\alpha e^{ix\xi}|\leqslant|\xi|^{-s+m}=|\xi|^{-\frac{n}{2}-\lambda},$$

$$\int_{|\xi|>1}(|\xi|^{-n/2-\lambda})^2d\xi=\int_{|\xi|>1}|\xi|^{-n-2\lambda}\,d\xi$$

$$=\omega_n\int_1^\infty r^{-n-2\lambda}r^{n-1}dr=\frac{\omega_n}{2\lambda}.$$

其中 ω_n 为 n 维单位球面的面积。故 $\xi^\alpha(1+|\xi|^2)^{-s/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$。又 $\hat{u}(1+|\xi|^2)^{s/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，故 $|\hat{u}\xi^\alpha|\in L^1(\boldsymbol{R}^n)$，根据控制收敛定理积分号下求微商是合理的，并且 $D^\alpha u(x)$ 连续。由 Riemann–Lebesgue 定理，$D^\alpha u(x)\to0$ $(|x|\to\infty)$。

再来考察 $D^\alpha u$ 的 Hölder 连续性。$|\alpha|=m$，我们有

$$D^\alpha u(x+y)-D^\alpha u(x)$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}(\xi)\xi^\alpha i^{|\alpha|}(e^{i(x+y)\xi}-e^{ix\xi})d\xi,$$

$$|D^\alpha u(x+y)-D^\alpha u(x)|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int|\hat{u}\xi^\alpha||e^{iy\xi}-1|d\xi$$

$$\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int\hat{u}|\xi|^{m+\frac{n}{2}+\lambda}\frac{|e^{iy\xi}-1|}{|\xi|^{n/2+\lambda}}d\xi.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|D^{\alpha}u(x+y)-D^{\alpha}u(x)|\leqslant C\|u\|_{s}\left(\int\frac{|e^{iy\xi}-1|^{2}}{|\xi|^{n+2\lambda}}d\xi\right)^{1/2}.$$

我们来证明

$$I(y)=I(y,n+2\lambda)=\int\frac{|e^{iy\xi}-1|^{2}}{|\xi|^{n+2\lambda}}d\xi$$

$$=C|y|^{2\lambda},C=C(n,\lambda). \tag{1.34}$$

设 R 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个旋转，则

$$I(Ry)=\int|e^{i(Ry)\xi}-1|^{2}|\xi|^{-n-2\lambda}d\xi$$

$$=\int|e^{iyR^{T}\xi}-1|^{2}|\xi|^{-n-2\lambda}d\xi\quad(R^{T}\text{ 为 }R\text{ 的转置})$$

$$=\int|e^{iy\xi'}-1|^{2}|\xi'|^{-n-2\lambda}d\xi'=I(y).$$

即 $I(y)$ 的值在旋转下不变. 设 R 把 y 旋转到 y_1 轴上，记 $e=(1,0,\cdots,0)$，则

$$I(y)=I(|y|e)=\int|e^{i|y|e\xi}-1|^{2}|\xi|^{-n-2\lambda}d\xi.$$

令 $|y|\xi=\xi'$ 做变量替换得

$$I(y)=|y|^{2\lambda}\int|e^{ie\xi'}-1|^{2}|\xi'|^{-n-2\lambda}d\xi'=|y|^{2\lambda}I(e).$$

我们来验证 $I(e)$ 是有穷值. 由于

$$|e^{ie\xi}-1|^{2}|\xi|^{-n-2\lambda}=O(|\xi|^{-n-2\lambda})\quad(|\xi|\to+\infty),$$

$$|e^{ie\xi}-1|^{2}|\xi|^{-n-2\lambda}=O(|\xi|^{2-n-2\lambda})\quad(|\xi|\to0),$$

故 $I(e)<\infty$. ∎

4.3 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$范数的内插

定理1.21 设s_1和s_2是两个非负实数，$s_1<s_2$，$\theta\in(0,1)$，$u\in H^{s_2}(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\|u\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2}\leqslant\|u\|_{s_1}^{\theta}\|u\|_{s_2}^{1-\theta}.$$

证明

$$\|u\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2}$$

$$=\left(\int|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{\theta s_1+(1-\theta)s_2}d\xi\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int(|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{s_1})^{\theta}(|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{s_2})^{1-\theta}d\xi\right)^{1/2},$$

由 Hölder 不等式

$$\|u\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2}\leqslant\left(\left(\int|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{s_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\theta}$$

$$\times\left(\left(\int|\hat{u}|^2(1+|\xi|^2)^{s_2}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{1-\theta}$$

$$=\|u\|_{s_1}^{\theta}\|u\|_{s_2}^{1-\theta}.\quad\blacksquare$$

推论1.2 设$0\leqslant s_1<s_2<s_3$，则对任意正数ε，存在$C=C(\varepsilon)$使对任意$u\in H^{s_3}(\boldsymbol{R}^n)$有

$$\|u\|_{s_2}\leqslant\varepsilon\|u\|_{s_3}+C(\varepsilon)\|u\|_{s_1}.$$

证明 存在$\theta\in(0,1)$使$s_2=\theta s_1+(1-\theta)s_3$，由定理1.21

$$\|u\|_{s_2}\leqslant\|u\|_{s_1}^{\theta}\|u\|_{s_2}^{1-\theta}=\left(\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}}\|u\|_{s_1}\right)^{\theta}\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\|u\|_{s_3}\right)^{1-\theta}.$$

由 Young 不等式得

$$\|u\|_{s_2}\leqslant\varepsilon\|u\|_{s_3}+\theta\left(\frac{\varepsilon}{1-\theta}\right)^{(\theta-1)/\theta}\|u\|_{s_1}.\quad\blacksquare$$

4.4 $H^s(\mathbf{R}^n)$的内在范数

通过 Fourier 变换表达 $H^s(\mathbf{R}^n)$的函数的范数简洁明了，在推导嵌入、内插等性质时也应付裕如，但对复合函数的研究却诸多不便，因为计算复合函数的 Fourier 变换没有可资利用的公式，因而迫切需要一个由函数本身结构表达 $H^s(\mathbf{R}^n)$范数的公式。

引理1.5 $s=m+\gamma$, $m\in\mathbf{Z}_+$, $\gamma\in(0,1)$. $u\in H^s(\mathbf{R}^n)$的充分必要条件是

$$u\in H^m(\mathbf{R}^n),\quad D^\alpha u\in H^\gamma(\mathbf{R}^n),\ \forall\,|\alpha|=m,$$

并且存在常数 $C>0$ 使

$$C^{-1}\Big(\|u\|_m^2+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_\gamma^2\Big)^{1/2}$$

$$\leqslant\|u\|_s\leqslant C\Big(\|u\|_m^2+\sum_{|\alpha|=m}\|D^\alpha u\|_\gamma^2\Big)^{1/2}. \tag{1.35}$$

证明　注意到$|(D^\alpha u)^\wedge|=|\xi^\alpha\hat{u}|$，由不等式

$$(1+|\xi|^2)^m\leqslant(1+|\xi|^2)^{m+\gamma}$$

和

$$|\xi|^{2m}(1+|\xi|^2)^\gamma\leqslant(1+|\xi|^2)^{m+\gamma}$$

得必要性。由不等式

$$(1+|\xi|^2)^{m+\gamma}\leqslant(1+|\xi|^2)^m 2^\gamma+2^m|\xi|^{2m}(1+|\xi|^2)^\gamma$$

得充分性。▍

引理1.6 若 $s\in[0,1]$，则对任意 $u\in H^s(\mathbf{R}^n)$有

$$\|u\|_s^2\leqslant\int|\hat{u}|^2(1+|\xi|^{2s})\mathrm{d}\xi\leqslant2\|u\|_s^2. \tag{1.36}$$

证明　对 $s\in[0,1]$，取函数

$$f(x)=(1+x)^s-(1+x^s),\quad x\geqslant0,$$

它的导数

$$f'(x)=s(1+x)^{s-1}-sx^{s-1}\leqslant 0,\quad x\geqslant 0.$$

故当 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)$ 单调下降。又 $f(0)=0$，于是 $x\geqslant 0$ 时 $f(x)$ 非正，(1.36)的第一个不等式得证。分别考虑 $|\xi|\leqslant 1$ 和 $|\xi|>1$ 两种情况立即得

$$1+|\xi|^{2s}\leqslant 2(1+|\xi|^2)^s.$$

(1.36)的第二个不等式得证。▌

引理1.7 若 $s\in(0,1)$，$u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则

$$\int|\hat{u}|^2(1+|\xi|^{2s})\,\mathrm{d}\xi=\int|u|^2\mathrm{d}x$$
$$+C_s\int|u(x)-u(y)|^2|x-y|^{-n-2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (1.37)$$

证明 由 Parseval 等式得

$$\int|\hat{u}|^2\mathrm{d}\xi=\int|u|^2\mathrm{d}x.$$

令 $x-y=x'$，再记 x' 为 x 得

$$I'=\iint|u(x)-u(y)|^2|x-y|^{-n-2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint|u(x+y)-u(y)|^2|x|^{-n-2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int|x|^{-n-2s}\|u(x+y)-u(y)\|^2_{L^2_y(\boldsymbol{R}^n)}\mathrm{d}x,$$

其中 $L^2_y(\boldsymbol{R}^n)$ 表示把 $u(x+y)-u(y)$ 作为 y 的函数在 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中求范数，而变量 x 看作参变量。利用 Parseval 等式得

$$I'=\int|x|^{-n-2s}\|((u(x+y)-u(y))^\wedge(\xi)\|^2_{L^2_\xi}(\boldsymbol{R}^n)\mathrm{d}x$$

$$=\int|x|^{-n-2s}\|(u(x+y))^\wedge(\xi)-(u(y))^\wedge(\xi)\|_{L^2_\xi(\boldsymbol{R}^n)}\mathrm{d}x$$

$$=\iint |x|^{-n-2s}|e^{ix\xi}-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi dx$$

$$=\int |\hat{u}(\xi)|^2 \int |x|^{-n-2s}|e^{ix\xi}-1|^2 dx d\xi.$$

由(1.34)得

$$\int |x|^{-n-2s}|e^{ix\xi}-1|^2 dx = C^{-1}|\xi|^{2s}, C=C(n,s).$$

(1.37)证毕。 ▎

定理1.22 若 $u\in H^s(\boldsymbol{R}^n), s=m+\gamma, m\in \boldsymbol{Z}_+, \gamma\in(0,1)$，则存在常数 $C=C(n,s)$ 使

$$C^{-1}\|u\|_s^2 \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{|\alpha|=m}\iint \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}dxdy \leqslant C\|u\|_s^2.$$

证明 这是前面三个引理的直接推论。 ▎

§5 $H^s(\Omega)$

5.1 $H^s(\Omega)$的定义

一般都是在任意区域 Ω 上求解偏微分方程，因此有必要讨论 Ω 上的分数次 Sobolev 空间。受 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$的内在范数的启发，对任意区域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$，我们引进

定义1.11 对实数 $s=m+\gamma, m\in\boldsymbol{Z}_+, \gamma\in(0,1)$，我们定义

$H^s(\Omega)=\{u\in H^m(\Omega)\,|\,(D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}$

$$\in L^2(\Omega\times\Omega),\ \forall\alpha\in Z_+^n,|\alpha|=m\},$$

其中的范数和内积规定为

$$\|u\|_{s,\Omega}^2=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega|D^\alpha u(x)|^2\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_\Omega\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$(u,v)_{s,\Omega}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega\int_\Omega\frac{(D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y))\,(\overline{D^2 u(x)}-\overline{D^\alpha v(y)})}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

定理1.23 对 $s>0$，$H^s(\Omega)$是可分 Hilbert 空间。

证明 只证 $H^s(\Omega)$的完备性。设 $H^s(\Omega)$中有一 Cauchy 序列$\{u_k\}$，$\|u_k-u_l\|_{s,\Omega}\to 0$ $(k,l\to\infty$，于是$\|u_k-u_l\|_{m,\Omega}\to 0$。由 $H^m(\Omega)$的完备性，存在 $u\in H^m(\Omega)$满足$\|u_k-u\|_{m,\Omega}\to 0$ $(k\to\infty)$。又对$|\alpha|=m$

$$\|(D^\alpha u_k(x)-D^\alpha u_k(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}$$
$$-(D^\alpha u_l(x)-D_l^\alpha u(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\to 0$$
$$(k,l\to\infty).$$

由 $L^2(\Omega\times\Omega)$的完备性，存在 $u_\alpha(x,y)\in L^2(\Omega\times\Omega)$使

$$\|(D^\alpha u_k(x)-D^\alpha u_k(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}-v_\alpha(x,y)\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\to 0$$
$$(k\to\infty).$$

如有必要过渡到子序列，可设

$$D^\alpha u_k(x)-D^\alpha u_k(y)\to D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)$$
$$(k\to\infty)\ \text{a.e.于}\ \Omega\times\Omega,$$

从而 $k\to\infty$时

$$(D^\alpha u_k(x)-D^\alpha u_k(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}$$

$$\to (D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))/|x-y|^{n/2+\gamma} \quad \text{a.e.于 } \Omega\times\Omega.$$

又可设 $k\to\infty$ 时

$$(D^\alpha u_k(x) - D^\alpha u_k(y))/|x-y|^{n/2+\gamma} \to v_\alpha(x,y)$$

$$\text{a.e.于 } \Omega\times\Omega.$$

故

$$(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))/|x-y|^{n/2+\gamma} = v_\alpha(x,y).$$

于是 $k\to\infty$ 时，对 $|\alpha| = m$ 有

$$\|(D^\alpha u_k(x) - D^\alpha u_k(y))/|x-y|^{n/2+\gamma} - (D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))/|x-y|^{n/2+\gamma}\|_{L^2(\Omega\times\Omega)} \to 0.$$

这就证明了 $\|u_k - u\|_{s,\Omega}\to 0$ $(k\to\infty)$，从而 $H^s(\Omega)$ 完备。可分性的证明留作习题。▌

定义1.12 对 $s\geqslant 0$ 定义

$$H_0^s(\Omega) = \{u\in H^s(\Omega) \mid \exists\, u_k\in C_0^\infty(\Omega),\ \|u_k - u_l\|_{s,l}\to 0\ \ (k\to\infty)\},$$

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'.$$

由定理1.18，$H_0^s(R^n) = H^s(R^n)$，但 $\Omega\neq R^n$ 时，$H_0^s(\Omega)$ 与 $H^s(\Omega)$ 一般不等。

5.2 $H^s(\Omega)$ 的逼近和延拓

定理1.24 当 $s\geqslant 0$ 时，$C^\infty(\Omega)\cap H^s(\Omega)$ 在 $H^s(\Omega)$ 中稠密。

证明 只需讨论 $s\in(0,1)$ 的情形。设 $u\in H^s(\Omega)$，做 u 的光滑化

$$J_\varepsilon u(x) = \varepsilon^{-n}\int_\Omega u(y)\ \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}y,$$

其中 ρ 为光滑子。已知对任意区域 $\Omega'\subset\subset\Omega$，

$$\|J_\varepsilon u - u\|_{0,\Omega'}\to 0\ \ (\varepsilon\to 0).$$

再考虑

$$I=\left(\int_{\Omega'}\int_{\Omega'}|A(x,y)|^2|x-y|^{-(n+2s)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_{\Omega'}\int_{\Omega'}\left|\int_{|z|<1}B(z)\mathrm{d}z\right|^2|x-y|^{-(n+2s)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2},$$

其中

$$A(x,y)=(J_\varepsilon u(x)-J_\varepsilon u(y))-(u(x)-u(y)),$$

$$B(z)=[u(x-\varepsilon z)-u(y-\varepsilon z)-(u(x)-u(y))]\rho(z).$$

由 Minkowski 不等式

$$I\leqslant\int_{|z|<1}\left(\int_{\Omega'}\int_{\Omega'}C(x,y,z)|x-y|^{-(n+2s)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\rho(z)\mathrm{d}z,$$

$$C(x,y,z)=|(u(x-\varepsilon z)-u(y-\varepsilon z))-(u(x)-u(y))|^2.$$

由于$(u(x)-u(y))/|x-y|^{n/2+s}\in L^2(\Omega\times\Omega)$，由 $L^2(\Omega\times\Omega)$ 中平移连续性

$$\int_{\Omega'}\int_{\Omega'}\frac{|(u(x-\varepsilon z)-u(y-\varepsilon z))-(u(x)-u(y))|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to0$$

$$(\varepsilon\to0)$$

关于$|z|<1$一致。故 $I\to0$ $(\varepsilon\to0)$。然后重复定理1.7的证明即可。▎

定理1.25 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 是有界区域，$\partial\Omega\in C^{m+1}$，$s=m+\gamma$，$m\in\boldsymbol{Z}_+$，$\gamma\in(0,1)$，则 $C^{m+1}(\bar{\Omega})$在 $H^s(\Omega)$中稠密。

证明 仿定理1.8的证明。▎

定理1.26 在定理1.25的条件下，存在 $H^s(\Omega)\to H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 的有界延拓算子。

证明 基本重复定理1.9的证明。利用单位分解和变量替换，并注意到跟光滑函数做乘积和进行光滑的变量替换，

H^s 中的函数仍变成 H^s 中的函数，利用 C^{m+1} 逼近，问题归结为延拓 $v\in H^s(B^+)\cap C^{m+1}(\overline{B^+})$。仍用延拓公式 (1.19)，只需做估计

$$\left(\int_{B^-}\int_{B^+}\frac{|D^\alpha\tilde{v}(x)-D^\alpha\tilde{v}(y)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_{B^-}\int_{B^+}\frac{\left|D^\alpha\tilde{v}(x)-\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{\alpha_n}c_jD^\alpha v\left(y',-\frac{y_n}{j}\right)\right|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{m+1}\left(\int_{B^+}\int_{B^-}\frac{|(-j)^{\alpha_n}C_j|D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)|^2 j}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\left(\int_{B^+}\int_{B^+}\frac{|D^\alpha v(x)-D^\alpha v(y)|^2}{|x-y|^{n+2\gamma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}=C\|v\|_{s,B^+}. \quad \blacksquare$$

5.3 嵌入定理

定理1.27 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界区域，$s=m+\frac{n}{2}+\gamma$，$m\in\boldsymbol{Z}_+$，$\gamma\in(0,1)$，$\partial\Omega\in C^{[s]+1}$，则有嵌入 $H^s(\Omega)\hookrightarrow C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})$。

证明 由延拓定理，存在延拓算子 $P\in\mathscr{L}(H^s(\Omega),H^s(\boldsymbol{R}^n))$，$Pu=u$，a.e.于 Ω。由 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 中的相应嵌入定理

$$\|u\|_{C^{m,\gamma}(\overline{\Omega})}\leqslant\|Pu\|_{C^{m,\gamma}(\boldsymbol{R}^n)}\leqslant C\|Pu\|_{s,\boldsymbol{R}^n}\leqslant C\|P\|\|u\|_{s,\Omega}. \quad \blacksquare$$

定理1.28 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^{[s]+1}$，$s>0$，$0<\varepsilon\leqslant s$，则嵌入 $H^s(\Omega)\hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$ 是紧的，即对 $H^s(\Omega)$ 中的任意有界序列 u_k，存在子序列 u_{k_i} 满足 $\|u_{k_i}-u\|_{s-\varepsilon,\Omega}\to 0$ $(i\to\infty)$，u 为 $H^s(\Omega)$ 中某一函数。

证明 设 $u_k\in H^s(\Omega)$，$\|u_k\|_s\leqslant C$，$k=1,2,\cdots$，由延拓定理，存在 $v_k\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，$\|v_k\|_s\leqslant C\|u_k\|_s$，$v_k=u_k$，a.e.于 Ω。$\mathrm{supp}\,v_k\subset\Omega_1$，$\Omega_1$ 是有界区域。$H^s(\boldsymbol{R}^n)$ 为 Hilbert 空间，其中

的有界集必含有一个弱收敛的子序列，仍记为v_k，不妨设$v_k \rightharpoonup 0$ $(k\to\infty)$。我们要证在$H^{s-\varepsilon}(\boldsymbol{R}^n)$中$v_k\to 0$ $(k\to\infty)$。跟前面一样，记$\hat{v}_k$为v_k的Fourier变换，问题变为证明

$$X_k=\int(1+|\xi|^2)^{s-\varepsilon}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\to 0\quad(k\to\infty).$$

设$M>0$为一待定常数，分解积分区域

$$X_k=\int_{|\xi|>M}(1+|\xi|^2)^{-\varepsilon}(1+|\xi|^2)^{s}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$+\int_{|\xi|<M}(1+|\xi|^2)^{s-\varepsilon}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

于是

$$X_k\leqslant(1+M^2)^{-\varepsilon}\int(1+|\xi|^2)^{s}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$+(1+M^2)^{s-\varepsilon}\int_{|\xi|<M}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\leqslant C(1+M^2)^{-\varepsilon}+(1+M^2)^{s-\varepsilon}\int_{|\xi|<M}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

任给$\delta>0$，取定$M>0$充分大，使$C(1+M^2)^{-\varepsilon}<\delta/2$，则有

$$|\hat{v}_k(\xi)=\left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_1}v_k(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant(2\pi)^{-n/2}\|v_k\|_0|\Omega'|^{1/2}.$$

由于在$H^s(\boldsymbol{R}^n)$中$v_k\rightharpoonup 0$ $(k\to\infty)$，对每一$\xi\in\boldsymbol{R}^n$，$\hat{v}_k(\xi)\to 0$ $(k\to\infty)$，由控制收敛定理，对取定的M，

$$(1+M^2)^{s-\varepsilon}\int_{|\xi|<M}|\hat{v}_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\to 0\quad(k\to\infty),$$

这就证明了$X_k\to 0$ $(k\to\infty)$。▌

5.4 范数内插

定理1.29 设 $0\leqslant s_1<s_2$，Ω 是 R^n 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^{[s_2]+1}$，则存在常数 $C=C(n,s_1,s_2,\theta,\Omega)$ 使

$$\|u\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2,\Omega}\leqslant C\|u\|_{s_1}^{\theta}\|u\|_{s_2}^{1-\theta},\ \forall v\in H^{s_2}(\Omega).$$

证明 设 P 是 $H^{s_2}(\Omega)$ 到 $H^{s_1}(R^n)$ 的延拓算子，易知对任意 $0<s<s_2$，它亦是延拓算子，由 $H^s(R^n)$ 的范数内插不等式

$$\begin{aligned}\|u\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2,\Omega}&\leqslant\|Pu\|_{\theta s_1+(1-\theta)s_2}\\&\leqslant\|Pu\|_{s_1,R^n}^{\theta}\|Pu\|_{s_2,R^n}^{1-\theta}\\&\leqslant(C_1\|u\|_{s_1,\Omega})^{\theta}(C_2\|u\|_{s_2,\Omega})^{1-\theta}\\&=C\|u\|_{s_1,\Omega}^{\theta}\|u\|_{s_2,\Omega}^{1-\theta}.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

5.5 Poincaré 不等式

定义1.13 对 $u\in H^m(\Omega)$，定义半范数

$$|u|_{j,\Omega}=\left(\sum_{|\alpha|=m}\|D^{\alpha}u\|_{0,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

显然

$$\|u\|_{m,\Omega}=\left(\sum_{j=0}^{m}|u|_{j,\Omega}^2\right)^{1/2}.$$

在 $H_0^m(\Omega)$ 的情形，$\|u\|_m$ 与 $|u|_m$ 等价，此即 Poincaré 不等式的内容。

定理1.30 设 Ω 是 R^n 的有界区域，则存在常数 $C=C(n,m,\Omega)$ 使

$$\|u\|_m\leqslant C|u|_m.$$

证明 设 $u\in C_0^\infty(\Omega)$，令 u 在Ω外取 0 值，则 $u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，设

$$\Omega=\{(x',x_n)\mid a<x_n<a+b\},$$

由 Newton-Leibniz 公式得

$$u(x',x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}D_nu(x',t)\mathrm{d}t.$$

注意到 $D_nu(x',t)$在 $t\overline{\in}(a,a+b)$时为 0，由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|u(x',x_n)|^2\leqslant b\int_{-\infty}^{+\infty}|D_nu(x',t)|^2\mathrm{d}t.$$

对 x_n 积分得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n=\int_a^{a+b}|u(x',x_n)|^2\mathrm{d}x_n$$

$$\leqslant b^2\int_{-\infty}^{+\infty}|D_nu(x',t)|^2\mathrm{d}t.$$

再对 x' 积分得

$$\int|u(x)|^2\mathrm{d}x\leqslant b^2\int|D_nu(x)|^2\mathrm{d}x.$$

故有

$$\|u\|_0^2\leqslant b^2|u|_1^2.$$

对D_iu 应用此式得

$$\|D_iu\|_0^2\leqslant b^2|C_iu|_1^2.$$

对 i 求和得

$$|u|_1^2\leqslant 2b^2|u|_2^2.$$

由归纳法知存在一个常数 r 使

$$|u|_j^2\leqslant rb^2|u|_j^2.$$

递推得$|u|_j\leqslant(\sqrt{r}\,b)^{m-j}|u|_m$. 故

$$\|u\|_m=\left(\sum_{j=0}^m|u|_j^2\right)^{1/2}\leqslant C|u|_m.$$

由逼近推理，此式对任意$u\in H_0^m(\Omega)$皆成立. ▎

§6 迹

本节讨论对偏微分方程至关重要的迹的概念，这是$\bar{\Omega}$上连续函数在$\partial\Omega$上取值的通常概念的推广. 为此先定义区域Ω的边界$\partial\Omega$上的Sobolev空间的概念，接着在$\Omega=\boldsymbol{R}_+^n$这一典型情形讨论迹应属的空间，最后推广到一般区域.

6.1 空间$H^s(\partial\Omega)$

定义1.14 设$s>0$，有界区域的边界$\partial\Omega\in C^{[s]+1}$，取定$\partial\Omega$的一个开覆盖$\{O_i|i=1,\cdots,N\}$，变换$\{\varphi_i|i=1,\cdots,N\}$，$\varphi_i(O_i)=B=B_1(O)$，$\varphi_i(\Omega\cap O_i)=B^+$，$\varphi_i(\partial\Omega\cap O_i)=\Sigma$，$\varphi_i,\varphi_i^{-1}\in C^{[s]+1}$，取定一个从属于$\{O_i|i=1,\cdots,N\}$的单位分解$\{\alpha_i|i=1,\cdots,N\}$. 设$u$是任一定义在$\partial\Omega$上的函数，令$(\alpha_iu)\circ\varphi_i^{-1}$在$\Sigma$外取零值，若这样得到的函数$(\alpha_iu)\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$，$i=1,\cdots,N$，则称$u\in H^s(\partial\Omega)$，并定义它的范数为

$$\|u\|_{s,\partial\Omega}^2=\sum_{i=1}^N\|(\alpha_iu)\circ\varphi_i^{-1}\|_{s,\boldsymbol{R}^{n-1}}^2.$$

为验证定义的合理性，先来建立几个引理.

引理1.8 设$s\in(\nu,1)$，Ω是有界区域，$\Omega'\subset\subset\Omega$，$\operatorname{supp}u\subset\Omega'$，$u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，则存在常数$C$使

$$\begin{aligned}&\|(u(x)-u(y))/|x-y|^{n/2+s}\|_{0,\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n}\\&\leqslant C'(\|u\|_{0,\boldsymbol{R}^n}+\|(u(x)-u(y))/|x-y|^{n/2+s}\|_{0,\Omega\times\Omega}).\end{aligned}$$

证明 只需验证

$$\iint_{(\Omega\times\Omega)^c} |u(x)-u(y)|^2/|x-y|^{n+2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C\int_\Omega |u|^2\mathrm{d}x,$$

其中$(\Omega\times\Omega)^c$是$\Omega\times\Omega$在$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$中的补集$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n-\Omega\times\Omega$。注意到

$$(\Omega\times\Omega)^c=(\Omega^c\times\Omega^c)\cup(\Omega\times\Omega^c)\cup(\Omega^c\times\Omega),$$

在$\Omega^c\times\Omega^c$上的积分显然为零，又

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\int_{\Omega^c}|u(x)-u(y)|^2/|x-y|^{n+2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_\Omega\int_{\Omega^c}|u(y)|^2/|x-y|^{n+2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\Omega'}|u(y)|^2\int_{\Omega^c}|x-y|^{-n-2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_{\Omega'}|u(y)|^2\int_{|x-y|>d}|x-y|^{-n-2s}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\omega_n\frac{1}{2sd^{2s}}\int_{\Omega'}|u(y)|^2\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

其中$d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$。类似地估计$\Omega^c\times\Omega$上的积分。∎

引理1.9 若$a\in C_0^1(\boldsymbol{R}^n)$, $u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$, $s\in(0,1)$，则$au\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$。

证明 只需估计下列积分

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|a(x)u(x)-a(y)u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\leqslant 2\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|a(x)|^2|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+2\int_{\boldsymbol{R}^n}\int_{\boldsymbol{R}^n}\frac{|a(x)-a(y)|^2|u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$\leqslant 2\max_{R^n}|a(x)|\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+2\int_{R^n}|u(y)|^2\int_{R^n}\frac{|a(x)-a(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\int_{R^n}\frac{|a(x)-a(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}y=\int_{R^n}\frac{|a(y+z)-a(y)|^2}{|z|^{n+2s}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_{|z|<1}\frac{|a(y+z)-a(y)|^2}{|z|^{n+2s}}\mathrm{d}z$$

$$+\int_{|z|>1}\frac{|a(y+z)-a(y)|^2}{|z|^{n+2s}}\mathrm{d}z$$

$$=I_1+I_2.$$

$$I_1\leqslant\max_{R^n}|Da|^2\int_{|z|<1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^{n+2s}}=\omega_n\max_{R^n}|Da|^2(2-2s)^{-1},$$

$$I_2\leqslant 2\max_{R^n}|a|^2\int_{|z|>1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|^{n+2s}}=2\max_{R^n}|a|^2\omega_n(2s)^{-1}.$$

故

$$\int_{R^n}\int_{R^n}\frac{|a(x)u(x)-a(y)u(y)|}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C\|u\|_s^2. \quad \blacksquare$$

为证明定义1.14的合理性，我们必须验证：

1）设另有一组覆盖$\{O'_j|j=1,\cdots,N'\}$，变换$\{\varphi'_j|j=1,\cdots,N'\}$和相应单位分解$\{a'_j|j=1,\cdots,N'\}$，则$(a_iu)\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(R^{n-1}),i=1,\cdots,N$与$(a'_ju)\circ\varphi'^{-1}_j\in H^s(R^{n-1}),j=1,\cdots,N'$同时成立或不成立。

2）$C^{-1}\|u\|_{s,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|'_{s,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{s,\partial\Omega}$，其中

$$\|u\|'_{s,\partial\Omega}=\sum_{j=1}^{N'}\|(a'_j u)\circ\varphi'^{-1}_j\|^2_{s,R^{n-1}},$$

C是一个与u无关的常数。

我们分三种情形验证。

i) s为非负整数。

1)的验证。由于$\sum_{i=1}^{N}a_i^2(x)=1, x\in\partial\Omega$，我们有

$$\begin{aligned}(a'_j u\circ\varphi'^{-1}_j)(y')&=a'_j(\varphi'^{-1}_j(y'))u(\varphi'^{-1}_j(y'))\\&=\sum_{i=1}^{N}a_i(\varphi'^{-1}_j(y'))a'_j(\varphi'^{-1}_j(y'))u(\varphi'^{-1}_j(y'))\\&=\sum_{i=1}^{N}(a_i a'_j u)\circ\varphi'^{-1}_j(y').\end{aligned}$$

注意到

$$(\mathrm{supp}\,a_i\cap\mathrm{supp}\,a'_j)\cap\partial\Omega\subset(O_i\cap\partial\Omega)\cap(O'_j\cap\partial\Omega)=\Gamma_i\cap\Gamma'_j$$

（见图 6），取区域

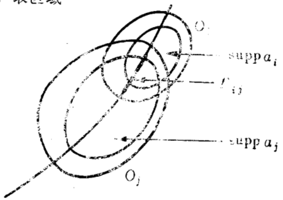


图 6

$$\Gamma_{ij}\subset\subset\Gamma_i\cap\Gamma'_j,\ \Gamma_{ij}\supset\mathrm{supp}\,a_i\cap\mathrm{supp}\,a'_j\cap\partial\Omega,$$

令

$$\sigma_i=\varphi_i^{-1}(\Gamma_{ij})\subset\Sigma,\quad \sigma'_j=(\varphi'_j)^{-1}(\Gamma_{ij})\subset\Sigma.$$

映射 $\varphi_j'^{-1}\circ\varphi_i$ 把 σ_i 变换为 σ'_j，作变量替换

$$y'=\varphi'_j\circ\varphi_i^{-1}(\tilde{y}'),$$

则有

$$(a_ia'_ju)\circ(\varphi'_j)^{-1}(y')=(a_ia'_ju)\circ\varphi_i^{-1}(\tilde{y}').$$

设 $(a_iu)\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$，由于 $a'_j\circ\varphi_i^{-1}(\tilde{y}')\in C_0^{[s]+1}(\boldsymbol{R}^{n-1})$（在 Σ 之外令 $a'_j\circ\varphi_i^{-1}(\tilde{y}')=0$），故乘积 $(a_ia'_ju)\circ\varphi_i^{-1}(\tilde{y}')\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$。由 H^s 在变量替换下的不变性得 $(a_ia'_ju)\circ\varphi_j'^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$，

$$(a'_ju)\circ(\varphi'_j)^{-1}=\sum_{i=1}^{N}(a_ia'_ju)\circ\varphi_j^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1}).$$

同理可由 $(a'_ju)\circ(\varphi'_j)^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 推知 $(a_iu)\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$。

2)的验证。

$$\begin{aligned}\|u\|'_{s,\partial\Omega}&\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{N'}(\sum\|a_ia'_ju\circ(\varphi'_j)^{-1}\|_s)^2\Big)^{1/2}\\&\leqslant C\Big(\sum_{j=1}^{N'}\sum_{i=1}^{N}\|(a_iu)\circ\varphi_i^{-1}\|_s^2\Big)^{1/2}\\&\leqslant C\sqrt{N'}\Big(\sum_{i=1}^{N}\|(a_iu)\circ\varphi_i^{-1}\|_s^2\Big)^{1/2}\\&=C'\|u\|_{s,\partial\Omega}.\end{aligned}$$

同理 $\|u\|'_{s,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{s,\partial\Omega}$。

ii) $s\in(0,1)$。

1)的验证。显然 $(a_ia'_ju)\circ\varphi_j'^{-1}\in L^2(\boldsymbol{R}^{n-1})$，令 $a_ia'_ju\circ\varphi_j=g_{ij}$，由引理1.8，

$$\int_{R^{n-1}}\int_{R^{n-1}}\frac{|g_{ij}(x)-g_{ij}(y)|^2}{|x-y|^{n-1+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\left(\|g_{ij}\|_{0,R^{n-1}}+\int_{\sigma'_j}\int_{\sigma'_j}\frac{|g_{ij}(x)-g_{ij}(y)|^2}{|x-y|^{n-1+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

作变量替换 $\mu_{ij}=\varphi'_j\circ\varphi_i^{-1}$, $x=\mu_{ij}(\zeta)$, $y=\mu_{ij}(\xi)$，则有

$$\int_{\sigma'_j}\int_{\sigma'_j}\frac{|g_{ij}(x)-g_{ij}(y)|^2}{|x-y|^{n-1+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\sigma_i}\int_{\sigma_i}\frac{|g_{ij}(\mu_{ij}(\xi))-g_{ij}(\mu_{ij}(\xi))|^2}{|\mu_{ij}(\zeta)-\mu_{ij}(\xi)|^{n-1+2s}}|J(\mu_{ij})|^2\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{\sigma_i}\int_{\sigma_i}\frac{|a_ia'_ju\circ\varphi_i^{-1}(\zeta)-a_ia'_ju\circ\varphi_i^{-1}(\xi)|^2}{|\zeta-\xi|^{n-1+2s}}$$

$$\times\left|\frac{\zeta-\xi}{\mu_{ij}(\zeta)-\mu_{ij}(\xi)}\right|^{n-1+2s}|J(\mu_{ij})|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $J(\mu_{ij})$ 有界且

$$\left|\frac{\zeta-\xi}{\mu_{ij}(\zeta)-\mu_{ij}(\xi)}\right|=\left|\frac{\mu_{ij}^{-1}(x)-\mu_{ij}^{-1}(y)}{x-y}\right|\leqslant M,$$

故

$$\int_{\sigma'_j}\int_{\sigma'_j}\frac{|g_{ij}(x)-g_{ij}(y)|^2}{|x-y|^{n-1+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant C\int_{\sigma_i}\int_{\sigma_i}\frac{|a_ia'_ju\circ\varphi_i^{-1}(\zeta)-a_ia'_ju\circ\varphi_i^{-1}(\xi)|^2}{|\zeta-\xi|^{n-1+2s}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi.$$

由于 $a_iu\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$，由引理 1.9，$a'_ja_iu\circ\varphi_i^{-1}\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1})$.

由变量替换保持 H^s 这一性质得

$$a_ia'_ju\circ\varphi'^{-1}_j\in H^s(\boldsymbol{R}^{n-1}),\ i=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,N',$$

对 i 求和得

$$\alpha'_j u \circ \varphi'^{-1}_j \in H^s(R^{n-1}),$$

并对范数得到估计 $\|u\|'_{s,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|_{s,\partial\Omega}$. 同理得 $\|u\|_{s,\partial\Omega} \leqslant C\|u\|'_{s,\partial\Omega}$.

iii) $s = m + \gamma, m \in \mathbf{Z}_+, \gamma \in (0,1)$, 结合 i)、ii) 即得结论.

6.2 $H^m(\mathbf{R}^n_+)$ 的迹

定理1.31 设 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\gamma_0 u = u(x', 0)$, 则存在 $C = C(n, m)$ 使

$$\|\gamma_0 u\|_{m-1/2, \mathbf{R}^{n-1}} \leqslant C\|u\|_{m, \mathbf{R}^n}.$$

证明 记 $u = u(x', x_n)$ 关于 $x' = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ 的 Fourier 变换为 $\hat{u}(\xi, x_n)$, 则

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(\xi', 0)|^2 &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n} |\hat{u}(\xi', x_n)|^2 \mathrm{d}x_n \\
&= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n} \hat{u}(\xi', x_n)\overline{\hat{u}(\xi', x_n)} \mathrm{d}x_n \\
&= -\int_0^\infty \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\hat{u}(\xi', x_n)\right)\overline{\hat{u}(\xi', x_n)} \right. \\
&\quad \left. + \hat{u}(\xi', x_n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\overline{\hat{u}(\xi', x_n)}\right]\mathrm{d}x_n \\
&= -2\mathrm{Re}\int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\hat{u}(\xi', x_n)\right)\overline{\hat{u}(\xi', x_n)}\mathrm{d}x_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\gamma_0 u\|^2_{m-1/2} &= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{m-1/2} |\hat{u}(\xi', 0)|^2 \mathrm{d}\xi' \\
&= -2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}^{n-1}} (1 + |\xi'|^2)^{m-1/2}
\end{aligned}$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\hat{u}(\xi', x_n)\overline{\hat{u}(\xi', x_n)}\mathrm{d}x_n \mathrm{d}\xi',$$

对关于 x_n 的积分用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\|\gamma_0 u\|^2_{m-1/2} \leqslant 2\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\hat{u}(\xi', \cdot)\right\|_{L^2_{x_n}(R')}$$
$$\times \|\hat{u}(\xi', \cdot)\|_{L^2_{x_n}(R')}\mathrm{d}\xi'.$$

用 Parseval 等式

$$\|\gamma_0 u\|^2_{m-1/2} \leqslant 2\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\hat{u}(\xi', \cdot)\right)^{\wedge(x_n)}\right\|_{L^2_{\xi_n}(R')}$$
$$\times \|(\hat{u}(\xi', \cdot))^{\wedge(x_n)}\|_{L^2_{\xi_n}(R')}\mathrm{d}\xi',$$

其中 $L^2_{x_n}$ 表示关于 x_n 的 $L^2(R')$空间，$\wedge(x_n)$表示对变量 x_n 的 Fourier 变换。关于变量 x_n 用 Parseval 等式得

$$\|\gamma_0 u\|^2_{m-1/2} \leqslant 2\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\|\xi_n\hat{u}(\xi)\|_{L^2_{\xi_n}(R')}$$
$$\times \|\hat{u}(\xi)\|_{L^2_{\xi_n}(R')}\mathrm{d}\xi'$$
$$\leqslant 2\left(\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\|\xi_n\hat{u}(\xi)\|^2_{L^2_{\xi_n}(R')}\mathrm{d}\xi'\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\int_{R^{n-1}}(1+|\xi'|^2)^{m-1/2}\|\hat{u}(\xi)\|^2_{L^2_{\xi_n}(R')}\mathrm{d}\xi'\right)^{1/2}$$
$$\leqslant 2\int(1+|\xi|^2)^m|\hat{u}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi = 2\|u\|^2_{m,R^n}.$$

定理1.32 定义在 $C_0^\infty(R^n)$上的迹算子

$$\gamma = (\gamma_0, \cdots, \gamma_{m-1}), \gamma_j u(x') = \frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x', 0),$$

可以扩张为 $H^m(R^n)$ 到 $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$上的有界线性算

子。

证明 由前一定理，对 $u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，

$$\|\gamma_j u\|_{m-j-1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}=\left\|\gamma_0\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right\|_{m-j-1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}$$

$$\leqslant C\left\|\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right\|_{m-j,\boldsymbol{R}^n}\leqslant C\|u\|_{m,\boldsymbol{R}^n},$$

$$j=0,1,\cdots,m-1.$$

又 $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$在 $H^m(\boldsymbol{R}_+^n)$中稠密(见定理1.10)，故 γ_j 可扩张为 $H^m(\boldsymbol{R}_+^n)$ 到 $H^{m-j-1/2}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 内的有界线性算子，即 $\gamma u=(\gamma_0 u,\cdots,\gamma_{m-1}u)$是 $H^m(\boldsymbol{R}_+^n)$到 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 内的有界线性算子。剩下的只是证明这个线性算子是映上的，即它的值域是全空间 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\boldsymbol{R}^{n-1})$。$C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$在$H^{m-j-1/2}(\boldsymbol{R}^{n-1})$中稠密，只需对 $\prod_{j=0}^{m-1}C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 定义 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\boldsymbol{R}^{n-1})$ 到 $H^m(\boldsymbol{R}^n)$ 的有界线性算子 R，使对 $(v_0,\cdots,v_{m-1})\in\prod_{j=0}^{m-1}C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$有

$$\gamma R(v_0,\cdots,v_{m-1})=(v_0,\cdots v_{m-1}).$$

对 $v_j\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^{n-1})$，令

$$u_j(x)=(R_j v_j)(x',x_n)$$

$$=(2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{\boldsymbol{R}^{n-1}}\hat{v}_j(\xi')e^{ix'\cdot\xi'-(1+|\xi'|^2)^{1/2}x_n}$$

$$\times(1+|\xi'|^2)^{-j/2}d\xi'.$$

积分号下求微商并利用反演公式得

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n^j}(x',0)=(2\pi)^{-\frac{n-1}{2}}\int_{R^{n-1}}\hat{v}_j(\xi')e^{ix'\cdot\xi'}d\xi'=v_j(x').$$

现在来估计范数

$$\|u_j\|^2_{m,R^n_+}=\sum_{i=0}^{m-1}\int_0^\infty\left\|\frac{\partial^i u_j}{\partial x_n^i}(\cdot,x_n)\right\|^2_{m-i,R^{n-1}}dx_n$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\int_0^\infty\int_{R^{n-1}}\left|\left(\frac{\partial^i u_j}{\partial x_n^i}\right)^{\wedge(x')}(\xi',x_n)\right|^2$$

$$\times(1+|\xi'|^2)^{m-i}d\xi'dx_n$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\int_0^\infty\int_{R^{n-1}}|\hat{v}_j(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{i-j}$$

$$\times(1+|\xi'|^2)^{m-i}e^{-2(1+|\xi'|^2)^{1/2}x_n}d\xi'dx_n$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\int_{R^{n-1}}|\hat{v}_j(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{m-j}$$

$$\times\int_0^\infty e^{-2(1+|\xi'|^2)^{1/2}x_n}dx_n d\xi'$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{2}\int_{R^{n-1}}|\hat{v}_j(\xi')|^2(1+|\xi'|^2)^{m-j-1/2}d\xi'$$

$$=\frac{m}{2}\|v_j\|^2_{m-j,R^{n-1}}.$$

利用延拓算子把 u_j 延拓到 R^n 上，仍记之为 u_j，令

$$\tilde{u}_j=\sum_{k=1}^{m}c_k u_j(x',kx_n),$$

取 c_k 满足

$$\sum_{k=1}^{m}c_k k^i=\delta_{ij},\quad i=0,1,\cdots,m-1,$$

则 $\tilde{u}_j$ 满足

$$\frac{\partial^i \tilde{u}_j}{\partial x_n^i}(x',0)=\delta_{ij}u_j(x',0)=\delta_{ij}v_j(x',0).$$

取 $u=\sum_{j=0}^{m-1}\tilde{u}_j=R(v_0,v_1,\cdots,v_{m-1})$，则

$$\gamma u=\gamma R(v_0,\cdots,v_{m-1})=(v_0,\cdots,v_{m-1}).$$

由 R 的构造方法可知

$$\|R(v_0,\cdots,v_{m-1})\|_{m,R^n}\leqslant C\sum_{i=0}^{m-1}\|v_i\|_{m-i-1/2,R^{n-1}}. \quad \blacksquare$$

γ_j 称为 j 次迹算子，$\gamma_j u$ 称为 u 在 $\partial\Omega$ 上的 j 次迹。算子 R 称为提升算子，它是迹算子 γ 的右逆算子。

6.3 $H^m(\Omega)$的迹

定理1.33 设有界区域 Ω 的边界 $\partial\Omega\in C^m$，则定义在 $C^m(\bar{\Omega})$ 上的迹算子 $\gamma u=\left(u\Big|_{\partial\Omega},\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega},\cdots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\Big|_{\partial\Omega}\right)$可扩张为 $H^m(\Omega)$ 到 $\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$ 上的有界线性算子。

证明 由延拓定理，存在 $H^m(\Omega)$ 到 $H^m(R^n)$ 的延拓算子 P，满足

$$\|Pu\|_{m,R^n}\leqslant C\|u\|_{m,\Omega},\ C=C(n,\Omega).$$

记 $Pu=\tilde{u}$。设 $u\in C^m(\bar{\Omega})$，则 $Pu\in C^m(R^n)$ 且有紧支集(参见定理1.9中延拓的方法)。设

$$\partial\Omega\subset\{O_i\,|\,i=1,\cdots,N\},\ \varphi_i(O_i)=B,$$

$$\varphi_i(O_i\cap\partial\Omega)=\Sigma,\ \ \varphi_i(O_i\cap\Omega)=B^+,\ \ \varphi_i,\varphi_i^{-1}\in C^m,$$

$\{\alpha_i\,|\,i=1,\cdots,N\}$ 是相应的单位分解，在 $\partial\Omega$ 的一个邻域内，

$\sum_{i=1}^{N} a_i = 1$。令

$$u = u\sum_{i=1}^{N} a_i = \sum_{i=1}^{N} ua_i,\ \partial\Omega上.$$

$\operatorname{supp}(ua_i)\circ\varphi_i^{-1}\subset B$，　$(ua_i)\circ\varphi_i^{-1}$ 在 B 外延拓为零，$(ua_i)\circ\varphi_i^{-1}\in C_0^m(\boldsymbol{R}^n)$，由定理1.32，对 $i=1,2,\cdots,N$，

$$\|\tilde{u}a_i\circ\varphi_i^{-1}(y',0)\|_{m-1/2,R^{n-1}}\leqslant C\|\tilde{u}a_i\circ\varphi_i^{-1}\|_{m,R_y^n}$$

$$\leqslant C\|\tilde{u}a_i\|_{m,R_x^n}\leqslant C'\|u\|_{m,\Omega},$$

$$\|u\|_{m-1/2,\partial\Omega}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}\|ua_i\circ\varphi_i^{-1}\|_{m-1/2,R^{n-1}}^2\right)^{1/2}\leqslant C\|u\|_{m,\Omega}.$$

对零次迹我们得到所要求的估计。为考虑1至 $m-1$ 阶法向导数，我们要求 φ 把 $\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}$ 变为 $\frac{\partial^j v}{\partial y_n^j}$，$j=1,\cdots,m-1$，$\nu$ 表示 $\partial\Omega$ 某点的内单位法向量。对任一点 $x_0\in\partial\Omega$，取一邻域O使对任意$x\in O\wedge\Omega$，距离 $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega\cap O)=\varphi(x)$ 满足

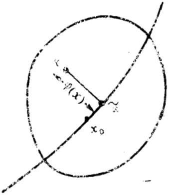


图 7

$$x=\tilde{x}+\varphi(x)\nu(\tilde{x}).$$

设 $\theta_i=\theta_i(x)$ 是下列一阶线性偏微分方程的函数独立的解

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(\nu(x),e_k)\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}=0,\quad i=0,1,\cdots,n-1,\ (1.38)$$

其中 e_k 为 x 轴的单位向量，$\nu(x)$ 是点 $x\in\partial\Omega$ 处指向 Ω 内部

的单位法向量。作变换

$$y_i=\theta_i(x), i=1,\cdots,n-1,\quad y_n=\theta_n(x)=\varphi(x). \quad (1.39)$$

由 $\partial\Omega\in C^m$ 可知 $\theta_i\in C^m, i=1,\cdots,n$。

$$y=\theta(x)=(\theta_1(x),\cdots,\theta_n(x)),$$

$$\theta,\theta^{-1}\in C^m, \theta(O)=B, \theta(\Omega\cap O)=B^+, \theta(\partial\Omega\cap O)=\Sigma.$$

在 Σ 上我们有

$$\forall u\in C^m(\bar{\Omega}), \left(\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\right)\circ\theta^{-1}=\frac{\partial^j}{\partial y_n^j}(u\circ\theta^{-1}), j=0,1,\cdots,m-1. \quad (1.40)$$

实际上由法向微商公式和链锁法则

$$\frac{\partial u}{\partial\nu}\circ\theta^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(\nu,e_k)\circ\theta^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n}(u\circ\theta^{-1})=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\circ\theta^{-1}\right)\frac{\partial x_k}{\partial y_n}.$$

只需证明在 Σ 上

$$\frac{\partial x_k}{\partial y_n}=\cos(\nu,e_k). \quad (1.41)$$

由于 $\theta_i(\theta^{-1}(y))=y_i, i=1,\cdots,n-1$，两端对 y_n 求偏微商

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_n}=0,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

令

$$a_{ik}=\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k},\quad \frac{\partial x_k}{\partial y_n}=z_k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}z_k=0,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

又由方程(1.38)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cos(\nu,e_k)=0,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

由于$\{\theta_i \mid i=1,\cdots,n-1\}$函数独立，存在$\lambda=\lambda(x)$使

$$z_k=\frac{\partial x_k}{\partial y_n}=\lambda\cos(\nu,e_k),\ k=1,\cdots,n. \qquad (1.42)$$

现计算$\lambda(x)$在$O\cap\partial\Omega$上的值，由$y_n=\varphi(x)$得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_n}=1.$$

以(1.42)代入

$$\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\cos(\nu,e_k)=1.$$

由$\varphi(x+t\nu(x))=t$，$x\in\partial\Omega\cap O$，两端对t在$t=0$求导数得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x)\cos(\nu,e_k)=1.$$

故有$\lambda(x)=1$，即(1.40) 对$j=1$成立。类似可证对$j=2,\cdots,m-1$皆成立。

由在$\Omega=\boldsymbol{R}^n$情形下迹算子的映上性可得

$$\gamma u=(\gamma\circ u,\cdots,\gamma_{m-1}\circ u)=\left(u,\frac{\partial u}{\partial\nu},\cdots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right)\bigg|_{\partial\Omega}$$

的映上性。 ∎

6.4 $H_0^m(\Omega)$和迹算子的核

我们曾经提到可以认为$H_0^1(\Omega)$中的函数在$\partial\Omega$上“取零值”(见定理1.11)，现在利用迹的概念，“取零值”可精确地说成零次迹是零，一般地我们有

定理1.34 设Ω是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega\in C^m$，则

$$H_0^m(\Omega)=\mathrm{Ker}\gamma=\left\{u\in H^m(\Omega)\,\middle|\,\gamma u=\left(u,\frac{\partial u}{\partial\nu},\cdots,\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right)\bigg|_{\partial\Omega}=(0,0,\cdots,0)\right\}.$$

证明　由于 $C_0^\infty(\Omega)\subset\mathrm{Ker}\gamma$，而 $\overline{C_0^\infty(\Omega)}=H_0^m(\Omega)$，$\mathrm{Ker}\gamma$ 为闭集，故 $H_0^m(\Omega)\subset\mathrm{Ker}\gamma$。现在证 $\mathrm{Ker}\gamma\subset H_0^m(\Omega)$。由于 $\partial\Omega\in C^m$，可把 $\partial\Omega$ 分片并把边界局部地展平，从而只需对 $\Omega=\boldsymbol{R}_+^n$ 的情形证明。设

$$u\in H^m(\boldsymbol{R}^n),\gamma=0,$$

即
$$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x',0)=0,j=0,1,\cdots,m-1,$$

令

$$\begin{cases}\tilde{u}(x)=u(x), & \text{当 } x\in\boldsymbol{R}_+^n \text{ 时；}\\ \tilde{u}(x)=0, & \text{当 } x\in\boldsymbol{R}^n-\boldsymbol{R}_+^n \text{ 时。}\end{cases}$$

我们验证

$$\begin{cases}D^\alpha\tilde{u}(x)=D^\alpha u(x), & \text{当 } x\in\boldsymbol{R}_+^n \text{ 时；}\\ D^\alpha\tilde{u}(x)=0, & \text{当 } x\in\boldsymbol{R}^n-\boldsymbol{R}_+^n \text{ 时。}\end{cases}$$

先设 $u\in C^m(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})\cap H^m(\boldsymbol{R}_+^n)$。任取 $\varphi\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$，由分部积分

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}\tilde{u}(x)D^\alpha\varphi\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}_+^n}u(x)D^\alpha\varphi\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^{|\alpha'|}\int_{\boldsymbol{R}_+^n}D^{\alpha'}u(x)\frac{\partial^{\alpha_n}\varphi}{\partial x_n^{\alpha_n}}\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^{|\alpha'|}\int_{R^{n-1}}\Big[-D^{\alpha'}u(x',0)\frac{\partial^{\alpha_n-1}}{\partial x_n^{\alpha_n-1}}\varphi(x',0)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_n}D^{\alpha'}u(x',0)\frac{\partial^{\alpha_n-2}\varphi}{\partial x_n^{\alpha_n-2}}(x',0)-\cdots$$

$$+(-1)^{\alpha_n}\frac{\partial^{\alpha_n-1}}{\partial x_n^{\alpha_n-1}}D^{\alpha'}(x',0)\varphi(x',0)$$

$$+(-1)^{\alpha_n}\int_0^\infty\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}D^{\alpha'}u(x)\varphi(x)\mathrm{d}x_n\Big]\mathrm{d}x'. \quad (1.43)$$

对 $u\in\mathrm{Ker}\gamma$，取 $u_k\in H^m(\boldsymbol{R}_+^n)\cap C^m(\overline{\boldsymbol{R}_+^n})$，使

$$\|u_k-u\|_{m,\boldsymbol{R}_+^n}\to 0,$$

$$\|\gamma_j u_k-\gamma_j u\|_{m-j-1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}=\|\gamma_j u_k\|_{m-j-1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}\to 0\ (k\to\infty).$$

例如有

$$\|\gamma_{\alpha_n-1}u_k\|_{m-\alpha_n+1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}\to 0\quad(k\to\infty),$$

从而(见习题23)

$$\|D^{\alpha'}\gamma_{\alpha_n-1}u_k\|_{m-\alpha_n-|\alpha'|+1/2,\boldsymbol{R}^{n-1}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

故至少有

$$\|D^{\alpha'}\gamma_{\alpha_n-1}u_k\|_{0,\boldsymbol{R}^{n-1}}\to 0\,(k\to\infty).$$

在(1.43)中以 u_k 代 u，则有

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n}D^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha_n-1}u_k}{\partial x_n^{\alpha_n-1}}\varphi(x',0)\mathrm{d}x'\to 0\quad(k\to\infty).$$

同理其它各项 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 上的积分亦趋于零，故

$$\int_{\boldsymbol{R}_+^n}u(x)D^{\alpha}\varphi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_{\boldsymbol{R}_+^n}D^{\alpha}u\varphi\mathrm{d}x.$$

这就证明了

$$D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u} \in L^2(\boldsymbol{R}^n), \tilde{u} \in H^m(\boldsymbol{R}^n).$$

定义

$$\tilde{u}_\eta(x', x_n) = \tilde{u}(x', x_n - \eta),$$

由 $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 中平移连续性得

$$\|\tilde{u}_\eta - \tilde{u}\|_{m,\boldsymbol{R}^n} \to 0 \quad (\eta \to +0).$$

注意到 $\operatorname{supp}\tilde{u}_\eta \subset \{x = (x', x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n > \eta\}$，作 $\tilde{u}_\eta$ 的光滑化

$$J_\varepsilon \tilde{u}_\eta(x) = \varepsilon^{-n} \int \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \tilde{u}_\eta(y) \mathrm{d}y,$$

由定理1.1知

$$\|J_\varepsilon \tilde{u}_\eta - \tilde{u}_\eta\|_{m,\boldsymbol{R}^n_+} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).$$

当 $\varepsilon < \eta/2$ 时，

$$\operatorname{supp} J_\varepsilon \tilde{u}_\eta \subset \left\{x = (x', x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n > \frac{\eta}{2}\right\}.$$

又设 ζ 是截断函数，我们知道

$$\left\|\zeta\left(\frac{x}{n}\right) J_\varepsilon \tilde{u}_\eta(x) - J_\varepsilon \tilde{u}_\eta(x)\right\|_{m,\boldsymbol{R}^n_+} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

而 $\zeta\left(\frac{x}{n}\right) J_\varepsilon \tilde{u}_\eta \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n_+)$。综合以上诸极限即知存在

$$u_k \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n_+), \|u_k - u\|_{m,\boldsymbol{R}^n_+} \to 0,$$

即 $u \in H_0^m(\boldsymbol{R}^n_+)$。 ▌

习　　题

1. 设 $u \in L^p(a,b)$，$u' \in L^p(a,b)$，$p \geq 1$，证明 u 在任意有穷闭区间 $[c,d] \subset (a,b)$ 上绝对连续。

2. 设 $u\in W^{1,p}(\boldsymbol{R}^n)$，$p\geqslant 1$，证明对 a.e. $x'\in\boldsymbol{R}^{n-1}$，$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$，$f(x',\cdot)$（即函数 $x_n\mapsto f(x',x_n)$）在 $\boldsymbol{R}^1$ 上局部绝对连续。

3. 设 $u\in W^{1,p}(\boldsymbol{R}^n)$，$Du=0$，则 $u=C$，a.e. 于 $\boldsymbol{R}^n$。

4. 设 $u,v\in C^m(\Omega)$，则有 Leibniz 公式

$$D^\alpha(uv)=\sum_{\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v,$$

其中

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\boldsymbol{Z}_+^n$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in\boldsymbol{Z}_+^n$，
$\beta\leqslant\alpha\Leftrightarrow\beta_i\leqslant\alpha_i$，$i=1,\cdots,n$。$\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$。
设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，$v\in C^m(\Omega)$，Leibniz 公式仍成立。

5. 若 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，$a\in C^m(\bar{\Omega})$，Ω 为有界区域，则 $au\in W^{m,p}(\Omega)$。

6. 若 $u\in W^{m,p}(\Omega_1)\cap W^{m,p}(\Omega_2)$，则 $u\in W^{m,p}(\Omega_1\cup\Omega_2)$。

7. 若 f 满足 Lipschitz 条件，即

$$|f(t_1)-f(t_2)|\leqslant L|t_1-t_2|,\quad\forall t_1,t_2\in\boldsymbol{R}^1,$$

$u\in W^{1,p}(\Omega)$，则 $f(u)\in W^{1,p}(\Omega)$，且

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x_i}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

其中规定 $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$ 时，$f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$。

8. 若 $u\in W^{m,p}(\Omega_2)$，$\theta:\Omega_1\to\Omega_2$，$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$，$\theta_i\in C^m(\bar{\Omega}_1)$，$\theta^{-1}\in C^m(\bar{\Omega}_2)$，则 $u\circ\theta\in W^{m,p}(\Omega_1)$，且存在常数 $C=C(\theta,n,m,\Omega_1)$ 使

$$\|u\circ\theta\|_{m,p,\Omega_1}\leqslant C\|u\|_{m,p,\Omega_2}.$$

9. 若 $u\in W^{m,p}(\boldsymbol{R}^n)$，$m-\frac{n}{p}=\lambda\in(0,1)$，则存在常数

$C=C(n,m,p)$使

$$|u(x)-u(y)|/|x-y|^{\lambda}\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}.$$

10．若$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{m}{n}>0$，则$u\in L^q(\Omega)$.

11．$f\in L^2(0,2\pi)$，证明$f\in H^s(0,2\pi)$的充分必要条件是

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1+m^2)^s|c_m|^2<+\infty\quad(s\geqslant 0),$$

其中c_m是f的Fourier系数

$$c_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}e^{-im\theta}f(\theta)d\theta.$$

12．$T^n=(0,2\pi)^n$，$u\in H^s(T^n)$的充分必要条件是

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Z}^n}(1+|\alpha|^2)^s|c_\alpha|^2<+\infty,\ \mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\},$$

$$c_\alpha=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{T^n}e^{-i\alpha x}f(x)dx.$$

13．$\Omega=\{(x,y)|x>0,y>0\}$，试证存在$H^m(\Omega)$到$H^m(\mathbf{R}^2)$的有界连续的延拓算子.

14．$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega$是有界区域，$\partial\Omega\in C^\infty$，证明

$H_0^m(\Omega)=\{u\in H^m(\Omega)\,|\,u$在$\Omega$外取零值的延拓$\tilde{u}\in H^m(\mathbf{R}^n)\}$.

15．$u\in H^s(R^2)\cap C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，证明$\gamma u(x')=u(x',0)$满足

$$\|\gamma u\|_{s-1/2,\mathbf{R}^{n-1}}\leqslant C\|u\|_{s,\mathbf{R}^n}\left(s>\frac{1}{2}\right).$$

16．$u\in H^s(\Omega)\cap C^\infty(\bar{\Omega})$，$s>\frac{1}{2}$，$\gamma u=u|_{\partial\Omega}$，证明

$$\|\gamma u\|_{s-1/2,\partial\Omega}\leqslant C\|u\|_{s,\Omega}.$$

17．$u(x)=e^{-|x|}$，证明 $u\in H^s(\boldsymbol{R}^n)$，$s<1+\dfrac{n}{2}$，但 $u\overline{\in}H^{1+n/2}(\boldsymbol{R}^n)$。

18．若 $H^s\subset C^k(\boldsymbol{R}^n)=\{u\in C^k(\boldsymbol{R}^n)\mid D^\alpha u$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 有界，$\forall\,|\alpha|\leqslant k\}$，则 $s>k+\dfrac{n}{2}$。

19．若 $u\in H^1(\Omega)$，则 $u\in H^s(\Omega)$，$s\in(0,1)$。

20．若 $u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，$\xi^\alpha\hat{u}\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，则弱导数 $D^\alpha u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$存在。

21．证明 $H^s(\Omega)$可分$(s>0)$。

22．Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中有界区域，$\partial\Omega\in C^\infty$，证明

$$H^s(\Omega)\subset L^p(\Omega),\quad \frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{s}{n},\quad 0<s<\frac{n}{2}.$$

23．$u\in H^m(\boldsymbol{R}^2_+)$，证明

$$D^\alpha\gamma_j u=\gamma_j D^\alpha u,\quad |\alpha|+j<m.$$

第二章 椭圆型方程

在第一章从薄膜平衡问题出发，我们给出了方程的变分形式，指出了在Sobolev空间中讨论了弱解的必要性，并研究了这种空间的种种性质。本章中，我们在Sobolev空间中讨论一般椭圆型方程的弱解，即将看到，弱解的存在性本质上就是Hilbert空间上有界线性泛函的Riesz表示定理的具体应用。弱解的正则性是本章重点，它沟通了弱解和古典解，同时也是研究抛物型、双曲型方程的基础之一。

§1 Lax-Milgram定理

给定一个复Hilbert空间H，其内积和范数分别用$(\ ,\ )$和$\|\ \|$表示，以H'记H上的所有有界共轭线性泛函组成的空间。所谓f是H上的共轭线性泛函，是指它是$H\to\boldsymbol{C}$的映射，满足

$$f(c_1u_1+c_2u_2)=\bar{c}_1f(u_1)+\bar{c}_2f(u_2),\quad \forall\, u_1,u_2\in H,c_1,c_2\in\boldsymbol{C}.$$

其中$\bar{c}$表示c的共轭复数。显然f是共轭线性泛函的充分必要条件是$\bar{f}$是线性泛函。若$f\in H',v\in H$，则以(f,v)记$f(v)$，并称为f和v的对偶积。

定理2.1(Lax-Milgram) 设$a(u,v)$是$H\times H\to\boldsymbol{C}$上的泛函，它具有

（1）共轭双线性，即

$$a(c_1u_1+c_2u_2,v)=c_1a(u_1,v)+c_2a(u_2,v),$$

$$\forall u_1,u_2,v\in H, C_1,C_2,\in \mathbf{C}, \tag{2.1}$$

$$a(u,c_1v_1+c_2v_2)=\bar{c}_1a(u,v_1)+\bar{c}_2a(u,v_2),$$

$$\forall u,v_1,v_2\in H, c_1,c_2\in \mathbf{C};$$

（2）有界性，即存在常数M使

$$|a(u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|, \quad \forall u,v\in H; \tag{2.2}$$

（3）强制性，即存在常数$\delta>0$，使

$$|a(u,v)|\geqslant\delta\|v\|^2, \quad \forall v\in H, \tag{2.3}$$

则对任意 $f\in H'$，存在唯一的 $u\in H$，使

$$a(u,v)=(f,v), \quad \forall v\in H, \tag{2.4}$$

且有估计

$$\|u\|\leqslant\delta^{-1}\|f\|. \tag{2.5}$$

证明 固定 $u\in H$，由 $a(u,v)$对第二个变量 v 的共轭线性(1)，映射 $a(u,\cdot):v\to a(u,v)$是H 上的共轭线性泛函，由有界性(2)，$a(u,\cdot)$是H上的有界共轭线性泛函，且

$$\|a\|(u,\cdot)\|_{H'}\leqslant M\|u\|. \tag{2.6}$$

由Hilbert空间关于有界线性泛函的 Riesz 表示定理可知，存在唯一的 $Au\in H$，满足

$$a(u,v)=(Au,v), \quad \forall v\in H, \tag{2.7}$$

且有

$$\|Au\|=\|a(u,\cdot)\|_{H'}\leqslant M\|u\|. \tag{2.8}$$

A是H到自身的线性算子，实际上，由A的定义

$$a(u_1,v)=(Au_1,v), a(u_2,v)=(Au_2,v), \quad \forall v\in H.$$

由 $a(u,v)$对第一个变量的线性，对任意复数 c_1 和 c_2

$$\begin{aligned} a(c_1u_1+c_2u_2,v)&=c_1a(u_1,v)+c_2a(u_2,v)\\ &=c_1(Au_1,v)+c_2(Au_2,v)\\ &=(c_1Au_1+c_2Au_2,v), \quad \forall v\in H. \end{aligned}$$

由A的定义知

$$A(c_1u_1+c_2u_2)=c_1Au_1+c_1Au_2.$$

于是 $A\in\mathscr{L}(H)$，这里 $\mathscr{L}(H)$ 表示 H 到自身的所有有界线性算子按算子范数组成的 Banach 空间. 由(2.8)可知

$$\|A\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant M. \tag{2.9}$$

根据 $a(u,v)$ 的强制性(3)我们有

$$\|Au\|\|u\|\geqslant|(Au,u)|=|a(u,u)|\geqslant\delta\|u\|^2.$$

故得

$$\|Au\|\geqslant\delta\|u\|. \tag{2.10}$$

由此式看出 $u\neq0$ 时，$Au\neq0$，由于 A 是线性算子，这表明 A 是一个单射. A 的值域 $\mathrm{R}(A)=AH$ 是 H 的闭线性子空间. 实际上，设 $Au_n\to v$，由(2.10)，

$$\|u_n-u_m\|\leqslant\delta^{-1}\|Au_n-Au_m\|\to0\quad(n,m\to\infty).$$

由 H 的完备性知存在 $u\in H$，$u_n\to u\ (n\to\infty)$. 由(1.8)

$$\|Au_n-Au\|=\|A(u_n-u)\|\leqslant M\|u_n-u\|\to0\quad(n\to\infty).$$

由极限唯一性得 $Au=v$，即 $v\in\mathrm{R}(A)$. 我们断言 A 是满射，即 $\mathrm{R}(A)=H$. 因否则，$\mathrm{R}(A)$ 是 H 的真闭子空间，由正交分解定理存在 $v\neq0$ 满足

$$(Au,v)=0,\quad\forall u\in H.$$

特别取 $u=v$，由强制性

$$0=(Av,v)\geqslant\delta\|v\|^2,$$

由此 $v=0$，，矛盾. 故 $AH=\mathrm{R}(A)=H$. A 既是单射又是满射，故逆算子 A^{-1} 存在，$A^{-1}\in\mathscr{L}(H)$，由(2.10)得

$$\|A^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)}\leqslant\delta^{-1}. \tag{2.11}$$

对于 $f\in H'$，由 Riesz 表示定理，存在唯一元素 $Jf\in H$ 使

$$(f,v)=(Jf,v),\quad\forall v\in H, \tag{1.12}$$

且 $\|Jf\|=\|f\|_{H'}$. 由于 $\mathrm{R}(A)=H$，存在 $u\in H$ 使

$$Au=Jf,$$

$$a(u,v)=(Au,v)=(Jf,v)=(f,v).$$

即(1.4)成立，并且

$$\|u\|=\|A^{-1}Jf\|\leqslant\delta^{-1}\|Jf\|=\delta^{-1}\|f\|_{H'}. \quad \blacksquare$$

Lax-Milgram 定理表明有界、共轭双线性型 $a(u,v)$ 满足强制条件时，若 u 跑遍 H，则 $a(u,\cdot)$ 跑遍 H'，这正是 Riesz 表示定理断言的内积(,)的性质，即在表示有界线性泛函的意义下，$a(u,v)$和(u,v) 的作用是一样的。当 $a(u,v)$ 满足共轭对称条件

$$a(u,v)=\overline{a(v,u)}$$

时，把$a(u,v)$看作H上的内积，相应范数$\sqrt{a(u,u)}$跟原来的范数$\|u\|=\sqrt{(u,u)}$等价，Lax-Milgram定理就是 Riesz 表示定理。在$a(u,v)$实对称的情形，我们可以给出 Riesz 表示定理一个基于变分原理的证明，若考虑闭凸集上的极值问题，就引出变分不等方程的重要概念。

定理2.2 设 $a(u,v)$是实Hilbert空间H上的实有界、对称、强制双线性型，则对于任意 $f\in H'$，存在唯一的$u\in H$满足

$$a(u,v)=(f,v), \quad \forall v\in H,$$

并且 u 是下列变分问题的解

$$I(u)=\min_{v\in H}I(v)=\min_{v\in H}\left(\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)\right). \quad (2.13)$$

证明 设 u_n 是极小序列，即

$$I(u_n)\to I_0=\inf_{v\in H}I(v).$$

由于强制性

$$I(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f,v)\geqslant\frac{\delta}{2}\|v\|^2-\|f\|\|v\|$$

$$\geqslant \frac{\delta}{2}\|v\|^2 - \left(\frac{\delta}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2\delta}\|f\|^2\right) = -\frac{1}{2\delta}\|f\|^2,$$

其中$\|f\| = \|f\|_{H'}$，故 I_0 为实数。由于 $a(u,v)$ 是对称双线性型，故平行四边形等式成立，

$$\begin{aligned}
a(u_n - u_m, u_n - u_m) &= 2(a(u_n,u_n) + a(u_m,u_m)) - a(u_n + u_m, u_n + u_m) \\
&= 2(a(u_n,u_n) + a(u_m,u_m)) - 4a\left(\frac{u_n + u_m}{2}, \frac{u_n + u_m}{2}\right) \\
&= 4(I(u_n) + I(u_m) + (f,u_n) + (f,u_m)) \\
&\quad - 8\left(I\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) + \left(f, \frac{u_n + u_m}{2}\right)\right) \\
&= 4(I(u_n) + I(u_m)) - 8I\left(\frac{u_n + u_m}{2}\right) \\
&\leqslant 4(I(u_n) + I(u_m)) - 8I_0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$0 \leqslant \underline{\lim}\, a(u_n - u_m, u_n - u_m) \leqslant \overline{\lim}\, a(u_n - u_m, u_n - u_m) \leqslant 0.$$

于是有

$$\lim a(u_n - u_m, u_n - u_m) = 0.$$

从而由强制性

$$\|u_n - u_m\|^2 \leqslant \frac{1}{\delta} a(u_n - u_m, u_n - u_m) \to 0.$$

由H完备性，存在 $u \in H$ 使

$$\|u_n - u\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

由 $I(v)$关于H的范数的连续性

$$I(u_n) \to I(u) = I_0.$$

为了得到方程(1.4)，考虑数值函数

$$\varphi(t) = I(u + tv),$$

其中 $v\in H$ 任意取定。φ 在 $t=0$ 取最小值 $I(u)$，由Fermat引理

$$\varphi'(0)=a(u,v)-(f,v)=0. \quad \blacksquare$$

如果我们在一个闭凸集 $K\subset H$ 上考虑变分问题

$$I(u)=\min_K I(v),$$

沿用上述定理的证明，由 $u_n,u_m\in K$ 和 K 的凸性知

$$(u_n+u_m)/2\in K,$$

同样得(2.14)式和 u_n 的收敛性。由 K 的闭性知极限 $u\in K$，并且 $I(u)$ 是 $I(v)$ 在 K 上的最小值。对任意 $v\in K$ 考虑数值函数

$$\varphi(t)=I(u+t(v-u))=I((1-t)u+tv), \quad t\in[0,1],$$

φ 在$[0,1]$的左端点 $t=0$ 取得最小值，于是

$$\varphi'(0)\geqslant 0,$$

即

$$u\in K,\ a(u,v-u)\geqslant (f,v-u),\ \forall v\in K. \qquad (2.15)$$

这样我们就证明了下列定理的存在性部分。

定理2.3 (Lions-Stampacchia) 设 K 是实Hilbert空间 H 内的闭凸集，$a(u,v)$ 是 H 上的实有界、对称、强制双线性型，f 是 H 上的有界线性泛函，则存在唯一的 u 满足(2.15)。

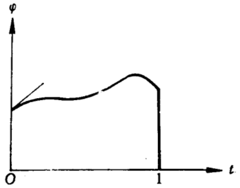


图 8

证明 只留下证明唯一性。设 u_1 和 u_2 是两个解，我们有

$$a(u_1,u_2-u_1)\geqslant(f,u_2-u_1),$$
$$a(u_2,u_1-u_2)\geqslant(f,u_1-u_2).$$

两式相加

$$-a(u_1-u_2,u_1-u_2)\geqslant 0.$$

由强制性

$$\delta\|u_1-u_2\|^2\leqslant a(u_1-u_2,u_1-u_2)\leqslant 0.$$

故

$$\|u_1-u_2\|=0, u_1=u_2. \quad \blacksquare$$

关系式(2.15)称为变分不等方程。当$a(u,v)$不满足对称条件时，Lions–Stampacchia 定理也成立，这就推广了 Lax-Milgram 定理。对变分不等方程有兴趣的读者可参看书末附的有关文献。

§2 二阶椭圆型方程的Dirichlet问题

在前节Lax-Milgram定理中取H为有界区域$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$上的Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$，在$H^1(\Omega)$上引进共轭双线性型

$$a(u,v)=\int_\Omega\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}+b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\bar{v}+cu\bar{v}\right)\mathrm{d}x, \tag{2.16}$$

其中系数

$$a_{ij},b_i,c\in L^\infty(\Omega),\quad i,j=1,\cdots,n. \tag{2.17}$$

设

$$|a_{ij}(x)|,|b_i(x)|,|c(x)|\leqslant M,\quad \text{a.e. } x\in\Omega, i,j=1,\cdots,n,$$

则

$$|a(u,v)|\leqslant M\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|+\sum_{i=1}^n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||v|+|u||v|\right)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant M' \|u\|_1 \|v\|_1,$$

共中$\|u\|_1 = \|u\|_{1,\Omega}$等等。由此可知$a(u,v)$是有界的。由Lax-Milgram定理直接可得

定理2.4 设V是$H^1(\Omega)$的一个闭子空间,$H_0^1(\Omega)\subset V$,共轭双线性型(2.10)的系数本性有界,又存在正数δ使

$$|a(v,v)| \geqslant \delta \|v\|_1^2, \quad \forall v \in V, \tag{2.18}$$

则对任意$f\in V'$,存在唯一的$u\in V$满足

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V. \tag{2.19}$$

我们面临着两个任务,第一,解释变分方程(2.19),说明u到底满足什么偏微分方程和边条件;第二,条件(2.18)是"生硬"的,用系数满足的条件表达它。

先来考虑第一个问题。设u满足变分方程(2.19),若系数及f,u充分光滑,进行分部积分得

$$\int_\Omega \left(- \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) \bar{v} \, dx = \int_\Omega f \bar{v} \, dx,$$
$$\forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

于是

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f. \tag{2.20}$$

若仅仅知道$u\in V\subset H^1(\Omega)$,由定理1.12知,

$$Lu \in H^{-1}(\Omega).$$

由

$$f \in V', \quad H_0^1(\Omega) \subset V, \quad V' \subset H^{-1}(\Omega)$$

知$f\in H^{-1}(\Omega)$,(2.19)式恰好表明(2.20)作为$H^{-1}(\Omega)$中的等式成立.反之,由(2.20)在$H^{-1}(\Omega)$中成立,仅能推知(2.19)对$v\in H_0^1(\Omega)$成立,为使(2.19)对所有$v\in V$成立,u还应满足一定的边条件,关于一般边条件的意义留待下节考虑。

不过若V就是$H_0^1(\Omega)$，$u\in H_0^1(\Omega)$本身即表明u满足边条件$u|_{\partial\Omega}=0$，自然当$\partial\Omega$有C^1光滑性时，这是在$H^1(\Omega)$的迹的意义下理解的。方程(2.20)叫作散度形式的，因其主部是向量

$$\left(-a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ -a_{i2}\frac{\partial u}{\partial x_i},\cdots,-a_{in}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

的散度。

再来考虑第二个问题。我们有

定理2.5 设(2.16)定义的$a(u,v)$在$H_0^1(\Omega)$上是强制的，即对任意$u\in H_0^1(\Omega)$，不等式(2.18)成立，则

$$|a_{ij}(x)\xi_i\xi_j|\geqslant\delta|\xi|^2,\qquad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ \text{a.e.}\ x\in\Omega. \tag{2.21}$$

证明 在$a(u,u)$中取

$$u(x)=\varphi(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi},\quad \varphi\in C_0^\infty(\Omega),\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

即得

$$a(u,u)=\int_\Omega a_{ij}(x)\xi_i\xi_j|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x+O(|\xi|).$$

又有

$$\|u\|_1^2=|\xi|^2\int_\Omega|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x+O(|\xi|),$$

代入强制条件(2.18)，除以$|\xi|^2$，令$|\xi|\to\infty$即得

$$\left|\int_\Omega a_{ij}(x)\acute{\xi}_i\acute{\xi}_j|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x\right|\geqslant\delta\int_\Omega|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x,\ \acute{\xi}=\xi/|\xi|. \tag{2.22}$$

由$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中的稠密性，用逼近推理易知(2.22)对任意$\varphi\in L^2(\Omega)$亦成立。设$\{\acute{\xi}^m\}_{m=1}^\infty$是单位球面上的一个稠密集，对固定的$x_0\in\Omega$，取$\varphi$为球$B_\varepsilon(x_0)$的特征函数，代入(2.22)，并除以$|B_\varepsilon(x_0)|=B_\varepsilon(x_0)$的体积，我们得

$$\left|\frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\int_{B_\varepsilon(x_0)} a_{ij}(x)\xi_i^m\xi_j^m \mathrm{d}x\right| \geqslant \delta, \quad \varepsilon < \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega).$$

由 Lebesgue 定理，存在零测集 S^m，使对 $\forall x_0 \in \Omega \backslash S^m$，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\int_{B_\varepsilon(x_0)} a_{ij}(x)\xi_i^m\xi_j^m \mathrm{d}x = a_{ij}(x_0)\xi_i^m\xi_j^m.$$

故得不等式

$$|a_{ij}(x_0)\xi_i^m\xi_j^m| \geqslant \delta, \quad \forall x_0 \in \Omega | S^m, m = 1, 2, \cdots.$$

令 $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S^m$，$|S| = 0$，对 $x_0 \overline{\in} S$ 有

$$|a_{ij}(x_0)\xi_i^m\xi_j^m| \geqslant \delta, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

由 $\{\xi^m\}_{m=1}^{\infty}$ 在单位球面上的稠密性，(2.21)成立。 ▌

鉴于条件(2.21)以及类似条件的重要性，我们引进

定义2.1 若(2.20)定义的算子 L 的主系数 $a_{ij}(x)$ 满足(2.21)式，则称算子 L 在 Ω 上是一致椭圆的；若 a_{ij} 满足

$$\mathrm{Re}\, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2, \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.23}$$

δ 是正常数，则称 L 在 Ω 上是一致强椭圆的，若 a_{ij} 满足

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, \tag{2.24}$$

则称 L 在 Ω 上是一致严格椭圆的。

我们看到共轭双线性型 $a(u, v)$ 的强制性蕴涵相应散度型算子的一致椭圆性，但反过来一般不对。在一些特殊情形下椭圆性蕴涵强制性，例如我们有

定理2.6 设 $(a_{ij}(x))_{i,j=1}^n$ 是一致正定Hermit 矩阵，即

$$a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2, \quad x \in \Omega, \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$，$c(x)$ 在 Ω 有正下界 c_0，$c\in L^\infty(\Omega)$，$b_i\equiv 0$，$i=1,\cdots,n$，则由(2.16)定义的共轭双线性型$a(u,v)$在$H_0^1(\Omega)$上强制，从而对任意$f\in H^{-1}(\Omega)$，齐次Dirichlet边值问题

$$u\in H_0^1(\Omega), Lu=f^-, H^{-1}(\Omega)\text{中}$$

有唯一解，且存在与 f 无关的常数 C 使

$$\|u\|_1\leqslant C\|f\|.$$

证明 对任意实函数 $u\in H_0^1(\Omega)$，

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}=a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\geqslant\delta|Du|^2$$

$$=\delta\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2\right),$$

$$a(u,u)=\int_\Omega\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}+cu\bar{u}\right)\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega\delta|Du|^2\mathrm{d}x.$$

由Poincaré不等式存在常数 $\delta_1>0$ 使

$$\int_\Omega|Du|^2\mathrm{d}x\geqslant\delta_1\|u\|_1^2,\quad\forall u\in H_0^1(\Omega),$$

于是

$$a(u,u)\geqslant\delta\delta_1\|u\|_1^2,\quad\forall u\in H_0^1(\Omega).$$

又对任意实向量 ξ，

$$\overline{a_{ij}\xi_i\xi_j}=\bar{a}_{ij}\xi_i\xi_j=a_{ji}\xi_i\xi_j=a_{ij}\xi_i\xi_j,$$

故 $a_{ij}\xi_i\xi_j$ 是实数，从而 u,v 是实函数时 $a(u,v)$ 是实数，对任意函数$u,v\in H_0^1(\Omega)$，

$$\overline{a(u,v)}=\int_\Omega\left(\bar{a}_{ij}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+c\bar{u}v\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(a_{ji}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+c\bar{u}v\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j}+cv\bar{u}\right)dx$$

$$=a(v,u).$$

u 和 v 为实函数时

$$a(u,v)=a(v,u).$$

对任意实函数 $u,v\in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u+iv,u+iv)=a(u,u)+ia(v,u)-ia(u,v)+a(v,v)$$
$$=a(u,u)+a(v,v)$$
$$\geqslant\delta\delta_1(\|u\|_1^2+\|v\|_1^2)=\delta\delta_1\|u+iv\|_1^2.$$

故对任意复值函数 $u\in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,u)\geqslant\delta\delta_1\|u\|_1^2,$$

即$a(u,v)$在 $H_0^1(\Omega)$上是强制的。定理的第二部分的结论是Lax-Milgram定理的直接推论。 ▎

定理2.7 设有界区域 Ω的边界 $\partial\Omega\in C^1$, 由(2.16)定义的共轭双线性型$a(u,v)$的系数本性有界，在 $H_0^1(\Omega)$上强制，$g\in H^{1/2}(\partial\Omega)$,

$$f=f_0+\frac{\partial f_i}{\partial x_i},\quad f_0,f_1,\cdots,f_n\in L^2(\Omega),\tag{2.25}$$

则存在唯一的 $u\in H^1(\Omega)$满足

$$\begin{cases}Lu=f,\ H^{-1}(\Omega)\text{中};\\ \gamma_0 u=g.\end{cases}\tag{2.26}$$

证明 由迹定理存在 $g\in H^{1/2}(\partial\Omega)$的提升 $\omega\in H^1(\Omega)$ 满足 $\gamma_0 w=g$, 这里 γ_0 表示在 $\partial\Omega$ 上的迹算子。令 $u=u_0+w$, 则 u_0 应满足

$$u_0\in H_0^1(\Omega),a(u_0,v)=(f,v)-a(w,v)=\tilde{f}(v),$$
$$\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{2.27}$$

由Lax-Milgram定理存在 $u_0\in H_0^1(\Omega)$满足(2.27)，即$u=u_0+w$满足(2.26)。 ∎

§3 二阶椭圆型方程的其它边值问题

3.1 空间 $H_\Delta^1(\Omega)$和 $H_\Delta^0(\Omega)$的迹

在转向其它边值问题时，首要的问题是如何在变分方程(2.19)中体现$\frac{\partial u}{\partial\nu}=g(\partial\Omega$上)这种Neumann 条件。我们先做一形式地推演。设 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ 满足 Poisson 方程和Neumann边条件

$$\begin{cases}-\Delta u=f, & \Omega\text{内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=g, & \partial\Omega\text{上}.\end{cases}$$

方程两端乘以检验函数 $v\in C^1(\bar{\Omega})$，由Green公式

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}gv\mathrm{d}\Gamma.$$

当仅知u属于 $H^1(\Omega)$时，$\frac{\partial u}{\partial\nu}$无意义，不过我们可以取 $g\in(H^{1/2}(\partial\Omega))'$，即 $g\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$，积分$\int_{\partial\Omega}gv\mathrm{d}\Gamma$代以对偶积$(g,v)=(g,\gamma_0 v)_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)}$，当 $u\in H^1(\Omega)$满足

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x+(g,\gamma_0 v)$$

时，自然就认为$\frac{\partial u}{\partial\nu}=g(\partial\Omega$上)。能否以合理的方式定义$\frac{\partial u}{\partial\nu}$，使得 Green 公式成立，并且对光滑函数新老定义一致呢？在 $f\in L^2(\Omega)$，$\partial\Omega\in C^2$ 的情形这是可以做到的。首先引

进

定义2.2 在空间

$$H_{\Delta}^{0}(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega)\,|\,\Delta u=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L^2(\Omega)\right\}$$

及
$$H_{\Delta}^{1}(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega)\,|\,\Delta u\in L^2(\Omega)\}$$

上规定范数

$$\|u\|_{0,\Delta,\Omega}^2=\|u\|_{0,\Delta}^2=(\|u\|_{0,\Omega}^2+\|\triangle u\|_{0,\Omega}^2,$$
$$\|u\|_{1,\Delta,\Omega}^2=\|u\|_{1,\Delta}^2=\|u\|_{1,\Omega}^2+\|\triangle u\|_{0,\Omega}^2.$$

其中$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$是广义导数。

跟在 $H^m(\Omega)$中讨论普通的迹的手续一样，首先讨论 $C^\infty(\bar{\Omega})$在 $H_{\Delta}^{0}(\Omega)$和 $H_{\Delta}^{1}(\Omega)$中的稠密性。

定理2.8 $C^\infty(\bar{\Omega})$在 $H_{\Delta}^{0}(\Omega)$和 $H_{\Delta}^{1}(\Omega)$中稠密。

证明 由于在乘以光滑函数和进行光滑变量替换后算子△"变形颇大"，通常的局部和展平推理难以应用，我们采用Hahn-Banach定理进行推理，并限于 $H_{\Delta}^{0}(\Omega)$的情形，而把 $H_{\Delta}^{1}(\Omega)$的情形留作习题。我们证明若对任一$f\in(H_{\Delta}^{0}(\Omega))'$和 $v\in C^\infty(\bar{\Omega})$ 有 $f(v)=0$。则 $f=0$。由Hahn-Banach 定理即知 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在$H_{\Delta}^{0}(\Omega)$中稠密。易知 $H_{\Delta}^{0}(\Omega)$同构于$(L^2(\Omega))^2$ 的一个闭子空间，由线性泛函延拓定理和$(L^2(\Omega))^2$上有界线性泛函表示定理即知(见定理1.12的证明)，存在 $h_0,h_1\in L^2(\Omega)$使

$$f(v)=\int_\Omega h_0 v\,\mathrm{d}x+\int_\Omega h_1\triangle v\,\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H_{\Delta}^{0}(\Omega).\tag{2.28}$$

假定对任意 $v\in C^\infty(\bar{\Omega})$，$f(v)=0$。以零值延拓 h_0 和 h_1 到 Ω 外，把所得的函数记为 $\tilde{h}_0$ 和 $\tilde{h}_1$，$\tilde{h}_0,\tilde{h}_1\in L^2(R^n)$，对任意 $v\in C_0^\infty(R^n)$，由(2.28)知

$$\int_{R^n}\tilde{h}_0 v\,dx+\int_{R^n}\tilde{h}_1\triangle v\,dx=\int_\Omega h_0 v|_\Omega dx+\int_\Omega h_1\triangle v|_\Omega dx=0.$$

这等价于在广义函数意义下

$$\tilde{h}_0+\triangle\tilde{h}_1=0. \tag{2.29}$$

即$\triangle\tilde{h}_1=-\tilde{h}_0\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$，或$(-\triangle+1)\tilde{h}_1=u\in L^2(\boldsymbol{R}^n)$。做Fourier 变换得

$$(|\xi|^2+1)(\tilde{h}_1)^\wedge=\hat{u}\in L^2(\boldsymbol{R}^n).$$

由$H^2(\boldsymbol{R}^n)$通过 Fourier 变换的定义，$\tilde{h}_1\in H^2(\boldsymbol{R}^n)$，由第一章习题14知$h_1\in H_0^2(\Omega)$。回到线性泛函$f$，对任意$v\in H_\Delta^0(\Omega)$，

$$\begin{aligned}f(v)&=\int_\Omega h_0 v\,dx+\int_\Omega h_1\triangle v\,dx\\&=\int_\Omega h_0 v\,dx+\int_\Omega\triangle h_1 v\,dx\\&=\int_\Omega(h_0+\triangle h_1)v\,dx.\end{aligned}$$

由(2.29)知$f(v)=0$。其中用到了等式

$$\int_\Omega h_1\triangle v\,dx=\int_\Omega\triangle h_1 v\,dx,\quad\forall v\in H_\Delta^0(\Omega). \tag{2.30}$$

我们可这样证明(2.30)。对$\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，由广义导数定义

$$\int_\Omega\varphi\triangle h_1\,dx=\int_\Omega(\triangle\varphi)h_1\,dx.$$

由于$h_1\in H_0^2(\Omega)$，存在$\varphi_n\in C_0^\infty(\Omega)$，$\|\varphi_n-h_1\|_{2,\Omega}\to0$，对$\varphi=\varphi_n$写出上式，再令$n\to\infty$取极限即得(2.30)式。 ▎

定理2.9 设$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$是有界区域，$\partial\Omega\in C^2$，则映射

$$u\to(\gamma_0 u,\gamma_1 u)=\left(u|_{\partial\Omega},\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}\right),\quad u\in C^\infty(\bar{\Omega})$$

可由连续性以唯一方式扩张为$H_\Delta^0(\Omega)$到$H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{-3/2}(\partial\Omega)$内的连续映射，这里

$$H^{-1/2}(\partial\Omega)=(H^{1/2}(\partial\Omega))',H^{-3/2}(\partial\Omega)=(H^{3/2}(\partial\Omega))';$$

又映射

$$u\to\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega},\quad u\in C^\infty(\bar\Omega)$$

可由连续性以唯一方式扩张为 $H^1_\Delta(\Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 内的连续映射.

证明 设 $u\in H^0_\Delta(\Omega)$, 对

$$\varphi=(\varphi_0,\varphi_1)\in H^{3/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega),$$

定义

$$Z_u(\varphi)=(\triangle u,R\varphi)_{0,\Omega}-(u,\triangle R\varphi)_{0,\Omega},\qquad(2.31)$$

其中 R 为 $H^{3/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)$ 到 $H^2(\Omega)$ 的提升算子, 使得

$$\gamma_0(R\varphi)=\varphi_0,\quad\gamma_1(R\varphi)=\varphi_1.$$

$Z_u(\varphi)$ 的值与提升算子 R 的选取无关. 事实上, 设

$$v_1,v_2\in H^2(\Omega),\quad\gamma_0v_1=\gamma_0v_2=\varphi_0,\quad\gamma_1v_1=\gamma_2v_2=\varphi_1,$$

令 $w=v_1-v_2$, 则有

$$\gamma_0w=\gamma_1w=0.$$

由定理1.34, $w\in H^2_0(\Omega)$, 由 Green 公式并结合逼近推理即知

$$(\triangle u,w)_{0,\Omega}-(u,\triangle w)_{0,\Omega}=0.$$

这就证明了 $Z_u(\varphi)$ 是由 u 和 φ 唯一确定的. 线性泛函

$$\varphi\to Z_u(\varphi):\ H^{3/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)\to\boldsymbol{C}$$

是有界的, 这由下列不等式推出

$$\begin{aligned}|Z_u(\varphi)|&\leqslant\|\triangle u\|_{0,\Omega}\|R\varphi\|_{0,\Omega}+\|u\|_{0,\Omega}\|\triangle R\varphi\|_{0,\Omega}\\&\leqslant C\|u\|_{0,\Delta}\|R_\varphi\|_{2,\Omega}\\&\leqslant C\|R\|\|u\|_{0,\Delta}\|\varphi\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)}.\end{aligned}\qquad(2.32)$$

由乘积空间上有界线性泛函表示定理可知, 存在

$$\gamma_0u\in H^{-1/2}(\partial\Omega),\quad\gamma_1u\in H^{-3/2}(\partial\Omega)$$

使得

$$Z_u(\varphi)=(\gamma_1 u,\varphi_0)-(\gamma_0 u,\varphi_1), \qquad (2.33)$$

且由(2.32),

$$\|\gamma_0 u\|_{-1/2,\partial\Omega}\leqslant\|Z_u\|\leqslant C\|R\|\|u\|_{0,\Delta},\|\gamma_1 u\|_{-3/2,\partial\Omega}$$

$$\leqslant\|Z_u\|\leqslant C\|R\|\|u\|_{0,\Delta}.$$

这说明 $u\to(\gamma_0 u,\gamma_1 u)$ 从 $H_\Delta^0(\Omega)$ 到 $H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{-3/2}(\partial\Omega)$ 连续。当 $u\in C^\infty(\bar{\Omega})$时，若 $\varphi_0\in C^\infty(\bar{\Omega})$，由 Green 公式，对 $\varphi=(\varphi_0,\triangle\varphi_0)$ 有

$$Z_u(\varphi)=\int_\Omega\triangle u\varphi_0\mathrm{d}x-\int_\Omega u\triangle\varphi_0\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varphi_0\mathrm{d}\Gamma-\int_{\partial\Omega}u\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}\mathrm{d}\Gamma.$$

所以$\gamma_0 u=u|_{\partial\Omega}$，$\gamma_1 u=\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}$.由连续性,对任意$u\in H_\Delta^0(\Omega)$,

存在 $u_n\in C^\infty(\bar{\Omega})$，使

$$\|\gamma_0 u-u_n|_{\partial\Omega}\|_{-1/2,\partial\Omega}\to 0,\left\|\gamma_1 u-\left.\frac{\partial u_n}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}\right\|_{-3/2,\partial\Omega}\to 0. \quad \blacksquare$$

推论2.1 若 $u\in H_\Delta^0(\Omega)$，$v\in H^2(\Omega)$，则

$$(\Delta u,v)_{0,\Omega}-(u,\Delta v)_{0,\Omega}=(\gamma,u,\gamma_0 v)_{0,\partial\Omega}-(\gamma_0 u,\gamma_1 v)_{0,\partial\Omega};$$

若 $u\in H_\Delta^1(\Omega)$,$v\in H^1(\Omega)$,则

$$(\Delta u,v)_{0,\Omega}=(\gamma,u,v)_{0,\partial\Omega}-\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x.$$

对 $H_\Delta^1(\Omega)(H_\Delta^0(\Omega))$ 中的函数 u 定义 $\frac{\partial u}{\partial\nu}\left(u|_{\partial\Omega},\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)$ 的方式是富于启发性的，我们无法逐点定义它们的值，而是通过适当的积分定义为适当空间上的有界线性泛函 f_u，当证明

了“好”的函数空间（例如$C^\infty(\bar{\Omega})$）在这一空间上稠密时，就可把对好的函数成立的某些关系式（例如Green公式）推广到更一般的函数上，而这些关系式正是我们需要的。

3.2 各种边值问题举例

例1 在$H^1(\Omega)$上考虑共轭双线性型

$$a(u,v)=\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}+u\bar{v}\right)\mathrm{d}x,$$

对$f\in L^2(\Omega)$，$g\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$，定义共轭线性泛函

$$F(v)=\int_\Omega f\bar{v}\,\mathrm{d}x+(g,\gamma_0 v),$$

其中$(g,\gamma_0 v)$表示$H^{-1/2}(\partial\Omega)$与$H^{1/2}(\partial\Omega)$之间的对偶积，显然

$$a(v,v)=\|v\|_{1,\Omega}^2,$$

a满足有界和强制条件，由Lax-Milgram定理，存在$u\in H^1(\Omega)$使

$$a(u,v)=F(v),\quad \forall v\in H^1(\Omega). \tag{2.34}$$

取$v\in H_0^1(\Omega)$，得

$$a(u,v)=\int_\Omega f\bar{v}\,\mathrm{d}x,$$

由此知在$H^{-1}(\Omega)$意义下

$$-\Delta u+u=f.$$

从而

$$u\in H_\Delta^1(\Omega).$$

若$\partial\Omega\in C^2$，由定理2.9可定义$\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$，上述方程两端乘以$v\in H^1(\Omega)$，由Green公式（见推论2.1）

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}+u\bar{v}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},v\right)=\int_\Omega f\bar{v}\mathrm{d}x. \qquad (2.35)$$

(2.34)—(2.35)得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\gamma_0 v\right)=(g,\gamma_0 v), \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

v 跑遍 $H^1(\Omega)$时，$\gamma_0 v$ 跑遍 $H^{1/2}(\partial\Omega)$，由此即得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=g\in H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

即 u 满足 Neumann 边条件。

例 2 取

$$V=\{v\in H^1(\Omega)\,|\,\gamma_0 v|_{\Gamma_1}=0\}, \quad \Gamma_1\subset\partial\Omega,$$

其中 $\partial\Omega\in C^2$，Γ_1 为 $\partial\Omega$ 的开子集，$|\Gamma_1|=\Gamma_1$ 的测度为正，定义 V 上的共轭双线性型

$$a(u,v)=\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}.$$

$a(u,v)$在 V 上是强制的，即存在 $\delta>0$ 使

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x\geqslant\delta\|u\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall v\in V. \qquad (2.36)$$

若不然，存在 $u_m\in V$，满足

$$\|u_m\|_{1,\Omega}=1, \quad \int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x\leqslant m^{-1}, \quad m=1,2,\cdots. \qquad (2.37)$$

由嵌入 $H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$的紧性和 $H^1(\Omega)$中有界集的弱紧性，我们可设

$$u_m\rightharpoonup u,\text{在 } H^1(\Omega)\text{中弱}; \quad u_m\to u, \quad \text{在 } L^2(\Omega)\text{中强},$$

由 $\gamma_0 u_m|_{\Gamma_1}=0$，易知 $\gamma_0 u|_{\Gamma_1}=0$。由 $L^2(\Omega)$ 范数的弱下半连续性，从不等式 (2.37) 得

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 = 0.$$

于是 $u = C$,a.e.于 Ω。由 $\gamma_0 u|_{\Gamma_1}=0$ 知 $u=0$，a.e.于Ω。由于在 $L^2(\Omega)$中，$u_m \to u$, $\|u_m\|_{0,\Omega} \to \|u\|_{0,\Omega}=0$，但由 (2.37)知 $\|u_m\|_{0,\Omega}\to 1$，矛盾。

由 Lax-Milgram 定理知对 $f\in L^2(\Omega)$，存在唯一的$u\in V$ 使

$$a(u,v) = (f,v)_{0,\Omega}, \quad \forall v\in V.$$

跟例 1 类似，记 $\Gamma_2 = \partial\Omega\backslash\Gamma_1$，则 u 是下列混合边值问题的解

$$\begin{cases} -\triangle u = f, & H^{-1}(\Omega)\text{中}; \\ u|_{\Gamma_1} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases}$$

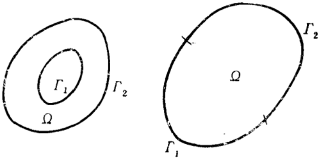


图 9

例 3 取共轭双线性型

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} c(x)\gamma_0 u \gamma_0 \bar{v} d\Gamma,$$

其中 $c(x)\geqslant c_0>0$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立，$a(u,v)$ 在 $H^1(\Omega)$ 上强制，若 $f\in L^2(\Omega)$，由 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $u\in H^1(\Omega)$ 满足变分方程

$$a(u,v)=(f,v)_{0,\Omega},\qquad \forall v\in H^1(\Omega).$$

相应方程和边条件是

$$\begin{cases}-\triangle u=f;\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}+c(x)\gamma_0 u=0.\end{cases}$$

例 4　取

$$V=\left\{u\in H^1(\Omega)\,\Big|\int_{\partial\Omega}\gamma_0 u\,\mathrm{d}\Gamma=0\right\},$$

$a(u,v)$ 为例 2 中的共轭双线性型，易证 $a(u,v)$ 在 V 上强制。设 $f\in L^2(\Omega)$，则由 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $u\in V$ 使

$$a(u,v)=(f,v)_{0,\Omega},\qquad \forall v\in V.$$

相应方程是

$$-\triangle u=f \tag{2.38}$$

方程两端乘以 1 并在 Ω 上积分得 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 满足

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial\nu},1\right)=\int_\Omega f\,\mathrm{d}x.$$

任取 $v\in H^1(\Omega)$，令

$$\tilde v=v-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}v\,\mathrm{d}\Gamma,$$

则 $\tilde v\in V$，方程(2.38)乘以 $\tilde v$，在 Ω 上积分，利用 Green 公式（推论2.1）得

$$a(u,\tilde{v})-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\ \gamma_0\tilde{v}\right)=(f,\tilde{v}).$$

于是

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\gamma_0\tilde{v}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\gamma_0 v\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}v\mathrm{d}\Gamma\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial \nu},1\right)\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}\bar{v}\mathrm{d}\Gamma$$

$$=\frac{-1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}f\mathrm{d}x\int_{\partial\Omega}\bar{v}\mathrm{d}\Gamma$$

$$=\left(-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}f\mathrm{d}x,\gamma_0 v\right)_{0,\partial\Omega}.$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}f\mathrm{d}x.$$

这样 u 满足

$$\begin{cases}-\triangle u=f;\\ \displaystyle\int_{\partial\Omega}\gamma_0 u\mathrm{d}\Gamma=0;\\ \displaystyle\frac{\partial u}{\partial \nu}=-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}f\mathrm{d}x.\end{cases}$$

若 u 表示一物体 Ω 内各点的温度，物体以热源密度 f 加热，温度不随时间改变，物体表面平均温度为零，则条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=-\frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\Omega}f\mathrm{d}x$$

表明 $\partial\Omega$ 各点流出的热量相等，且穿过 $\partial\Omega$ 流出的总热量 $\frac{\partial u}{\partial \nu}|\partial\Omega|$ 等于热源供给的总热量 $\int_{\Omega}f\mathrm{d}x$。

例 5　设$\in fL^2(\Omega)$，取空间

$$V=\{v\in H^1(\Omega)\,|\,\gamma_0 v=\text{常数}\},$$

共轭双线性型 $a(u,v)$和例 1 中的相同，由 Lax-Milgram 定理存在唯一 $u\in V$ 满足

$$a(u,v)=(f,v),\qquad \forall v\in V.$$

由后面的正则性定理知 $u\in H^2(\Omega)$，故$\frac{\partial u}{\partial \nu}\in H^{1/2}(\partial\Omega)$，由 Green 公式得

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}\Gamma=0.$$

于是 u 满足等位面

$$\begin{cases}-\triangle u+u=f, & \Omega\text{内;}\\ u=C, & \partial\Omega\text{上;}\\ \displaystyle\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}\Gamma=0.\end{cases}$$

$u=C(\partial\Omega$上）称为等位面条件。

例 6　取 $V=H_0^1(\Omega)$，设 $\Omega=\Omega_1\cup S\cup\Omega_2$，$f\in L^2(\Omega)$，$S=\bar{\Omega}_1\cap\bar{\Omega}_2$。

$$a_{ij}(x)=\begin{cases}a_{ij}^1(x), & x\in\Omega_1;\\ a_{ij}^2(x), & x\in\Omega_2.\end{cases}\qquad a_{ij}^k\in L^\infty(\Omega_k),\ k=1,2,$$

$$a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j\geqslant\delta_k|\xi|^2,\qquad \text{a.e.}\,x\in\Omega,$$

$$\forall\xi\in\boldsymbol{R}^n,\ k=1,2,\ \delta_k>0.$$

定义双线性型

$$a(u,v)=\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\Omega_1}a_{ij}^1(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\mathrm{d}x+\int_{\Omega_2}a_{ij}^2(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_j}\mathrm{d}x$$

$$= a_1(u_1, v_1) + a_2(u_2, v_2),$$

其中

$$u_k = u|_{\Omega_k}, \quad v_k = v|_{\Omega_k}, \qquad k = 1, 2.$$

显然 $a(u,v)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制，由 Lax-Milgram 定理，存在唯一的 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使

$$a(u,v) = (f, v)_{0,\Omega}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (2.39)$$

在上式中取 $v \in C_0^\infty(\Omega_k)$ 得

$$L_k u = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f_k = f|_{\Omega_k}, \qquad k = 1, 2, \Omega_k \text{ 内}.$$

设 S 光滑，由 $u \in H_0^1(\Omega)$ 易知

$$\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2, \quad S \text{ 上}.$$

若 u_k 和 S 光滑，可在 S 上定义余法向导数

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu_{L_k}} = a_{ij}^k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \nu_j,$$

$\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$ 为 S 的从 Ω_1 指向 Ω_2 的单位法向量，在 Ω_k 上应用 Green 公式

$$\int_{\Omega_1} (L_1 u_1) v_1 \mathrm{d}x = -\int_S \frac{\partial u_1}{\partial \nu_{L_1}} v_1 \mathrm{d}s + a_1(u_1, v_1),$$

$$\int_{\Omega_2} (L_2 u_2) v_2 \mathrm{d}x = \int_S \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{L_2}} v_2 \mathrm{d}s + a_2(u_2, v_2),$$

两式相加得

$$\int_S \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu_{L_1}} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu_{L_2}}\right) v \mathrm{d}s = 0, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

故有 $\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu_{L_1}} = \dfrac{\partial u_2}{\partial \nu_{L_2}}$，这样在 S 上 u_1 和 u_2 满足转移条件

$$\begin{cases} u_1 = u_2; \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \nu_{L_1}} = \dfrac{\partial u_2}{\partial \nu_{L_2}}. \end{cases}$$

关于 u_1 和 u_2 的正则性参见本章习题22。

例 7 我们以一个弹性力学的方程组来结束对 Lax-Milgram 定理各种应用例子的考察。设一个弹性体 $\Omega \subset R^3$ 的位移向量为 $u = (u_1, u_2, u_3)$，其应变为

$$\varepsilon_{kh}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right),$$

应力和应边有关系

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \ \varepsilon_{kh}(u).$$

(a_{ijkh}) 为弹性张量，假设

$$a_{ijkh} \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ijkh} = a_{jihk} = a_{khij},$$

$$a_{ijkh}(x)\xi_{ij}\xi_{kh} \geqslant \alpha \xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \alpha > 0, \qquad \forall \xi \in \mathbf{R}^{n^2}, \text{a.e.}\, x \in \Omega.$$

定义双线性型

$$a(u, v) = \int_\Omega a_{ijkh} \ \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kh}(v)\mathrm{d}x,$$

由 Korn 不等式知

$$a(v, v) \geqslant \alpha' \|v\|_1^2, \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3.$$

这里

$$\|v\|_1^2 = \|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_1^2 + \|v_3\|_1^2.$$

对 $f \in (L^2(\Omega))^3$，由 Lax-Milgram 定理存在唯一的 $u \in (H_0^1(\Omega))^3$ 满足

$$a(u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in (H_0^1(\Omega))^3,$$

即 u 是下列弹性方程组 Dirichlet 边值问题的解：

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = f_i, & \Omega\text{内}, \quad i = 1, 2, 3; \\ u_i = 0, & \partial\Omega\text{上}, \ i\partial\Omega\text{上}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

我们从上节和本节的大量例子看出，Lax-Milgram 定理统一解决了跟有界、强制（共轭）双线性型相应的变分方程解的存在唯一性问题，因此在应用中往往把椭圆型方程的边值问题化为变分方程的形式。为此，首先要选取适当的函数空间V，V的选取部分（或全部）体现了解满足的边界条件。其次，从V中任取检验函数v乘微分方程两端，利用 Green 公式进行分部积分，把解的导数降低一阶，转嫁到检验函数v上，在边界积分里体现了边界条件，这就自然产生了双线性型和线性泛函。在解释变分方程的解所满足的边界条件时，特别对$H^1(\Omega)$中的函数讨论法向导数时，我们用把法向导数看作$H^{-1/2}(\partial\Omega)$中的元素的方法推广了迹的概念。如果事先知道了解属于$H^2(\Omega)$，对变分方程倒过来分部积分，即把双线性型中对检验函数的微商全部解脱出来转移到解上，可方便地得到解在更强的意义下满足边条件（见§6）。

应用 Lax-Milgram 定理的关键是验证双线性型的强制性。因为双线性型中往往并不包含V中范数中的所有导数，所以需要结合边界条件证明已出现的导数的积分能够控制未出现的导数的积分，这就必须精心建立各种不等式（Poincaré 和 Korn 不等式等）。

§4 极值原理

在应用 Lax-Milgram 定理证明二阶椭圆型方程解的存在性时，相应双线性型的强制性是关键性的条件，但这一条件并不总是满足的。强制性保证了解的存在性，也保证了解的唯一性。但在古典理论中我们知道，只要椭圆型方程

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=f$$

中 u 的系数 c 非负，相应 Dirichlet 边值问题的解唯一。又从 Fredholm 抉择性知道在一定条件下唯一性可以保证存在性，唯一性又是极值原理的直接推论，因此对变分方程的解（弱解）建立极值原理显得十分必要。

回忆古典极值原理的建立，其基础之一是闭区域上的连续函数必在某点取到最大值和最小值，其基础之二是若解在内点取到最大值，解在该点的梯度为零向量，解在该点的二阶导数组成的 Hess 矩阵半负定。但这两个基础对弱解概不适用，因为弱解可能根本不连续，更不用说逐点存在二阶导数了。

为建立弱解的极值原理，唯有依靠变分方程本身的力量，即选择解的截断函数为检验函数，证明解的正部或负部为零函数，从而断定解非正或非负。

现举一例，以窥全豹。设 $u\in H_0^1(\Omega)$ 满足方程

$$-\triangle u=f,$$

其中 f 是 $L^2(\Omega)$ 中的非负函数，我们要证在 Ω 内 u 几乎处处非负。我们知道 u 满足上述方程的意义是

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}x=\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x=\int_\Omega fv\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.40}$$

我们要取 $v=u^+$ 作为检验函数，我们暂时承认 $u^-\in H_0^1(\Omega)$，从而它是一个合格的检验函数。为计算 u^- 的广义导数，还要暂时承认

$$\frac{\partial u^+}{\partial x_i}=\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{当 } u>0\text{；}\\ 0, & \text{当 } u\leqslant 0\text{。}\end{cases}$$

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i}=\begin{cases}0, & \text{当} u\geqslant 0\text{；}\\ -\dfrac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{当} u<0\text{。}\end{cases}\tag{2.41}$$

把 $v=u^-$ 代入变分方程(2.40)，注意到 $u=u^+-u^-$，我们有

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial u^+}{\partial x_i}-\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\mathrm{d}x=\int_\Omega fu^-\mathrm{d}x\text{。}\tag{2.42}$$

由 (2.41) 知

$$\int_\Omega\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=0\text{。}$$

由 f 非负知

$$\int_\Omega fu^-\mathrm{d}x\geqslant 0\text{。}$$

由 (2.42) 得

$$\int_\Omega\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\frac{\partial u^-}{\partial x_i}\mathrm{d}x=0\text{。}$$

由此式知

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_i}=0,\qquad \text{a.e.于 }\Omega,\ i=1,2,\cdots,n\text{。}$$

从而 $u^-=c$，a.e.于 Ω，但 $u^-\in H_0^1(\Omega)$，故 $u^-=0$，即在Ω上 u 非负。

我们看到要使上述论证建立在严格的逻辑基础之上，必须解决两个问题：u 属于 $H^1(\Omega)$时是否 u^+ 属于 $H^1(\Omega)$；弱导数公式(2.41)是否成立。

引理2.1 若 $f\in C^1(\boldsymbol{R}^1)$，$|f'(x)|\leqslant M$，$x\in\boldsymbol{R}^1$，$u\in H^1(\Omega)$，则 $f\circ u\in H^1(\Omega)$ 且有链锁法则

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(u(x))=f'(u(x))\frac{\partial u}{\partial x_i},\qquad i=1,2,\cdots,n. \quad (2.43)$$

证明 由 $H^1(\Omega)$ 的逼近定理，存在 $u_k\in C^1(\Omega)$ 满足

当 $k\to\infty$ 时，$\|u_k-u\|_1\to 0$，$u_k\to u$, a.e. 于 Ω.

任取开集 $\Omega'\subset\subset\Omega$，我们有

$$\int_{\Omega'}|f(u_k)-f(u)|\,\mathrm{d}x\leqslant M\int_{\Omega'}|u_k-u|\,\mathrm{d}x\to 0,$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'}&\left|f'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant M\int_{\Omega'}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x+\int_{\Omega'}|f'(u_k)-f'(u)|\\&\qquad\times\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x\to 0.\end{aligned}\quad (2.44)$$

由古典的复合函数微商的链锁法则

$$\frac{\partial}{\partial x_i}f(u_k)=f'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

利用(2.44)对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 得

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u_k)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x&=-\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}f(u_k)\varphi\,\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega f'(u_k)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

利用(2.44)，令 $k\to\infty$ 取极限给出

$$\int_{\Omega} f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega} f(u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\,\mathrm{d}x.$$

由弱导数定义此式即表示(2.43)成立，并由此断言 $f\circ u\in H^1(\Omega)$。 ▌

在应用中，往往 f 仅满足 Lipschitz 条件，这时上述引理仍然成立，但证明较难。我们仅对 $f(t)=t^+(t^-)$ 的特殊情形进行讨论，这对下面的应用已足够了。



图 10

引理2.2 若 $u\in H^1(\Omega)$，则 $u^+, u^-, |u|\in H^1(\Omega)$ 且(2.41)成立。

证明 考虑 $f(t)=t^+$ 的下例 C^1 逼近

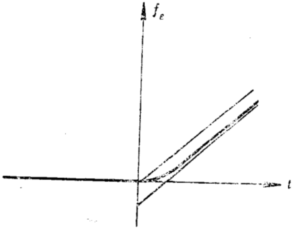


图 11

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}(t^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

直接算得

$$f'_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\sqrt{t^2+\varepsilon^2}}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

设 $u\in H^1(\Omega)$，由前一引理

$$f_\varepsilon(u)\in H^1(\Omega),\ \frac{\partial}{\partial x_i}f_\varepsilon(u)=f'_\varepsilon(u)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

对任意 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 我们得

$$\int_\Omega f_\varepsilon(u)\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x=-\int_\Omega f'_\varepsilon(u)\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{u>0}\ \frac{u}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_{u>0}$ 表示在集合 $\{x\in\Omega|u(x)>0\}$ 上积分。令 $\varepsilon\to0^+$ 得

$$\int_\Omega f(u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathrm{d}x=-\int_{u>0}\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\ \mathrm{d}x,$$

即(2.41)第一式成立，类似地证明第二式。 ▎

引理2.3 设 $u\in H^1(\Omega)$，$u=C$, a.e. 于 $E\subset\Omega$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\qquad \text{a.e. 于 } E,\ i=1,2,\cdots,n.$$

证明 不妨认为 $c=0$。由于 $u=u^+-u^-$，从表达式(2.41)立刻得到引理的结论。 ▎

以下设 $\partial\Omega\in C^1$，这时对 $u\in H^1(\Omega)$，迹 $\gamma_0u=\gamma u$ 有定义，取正部和取迹可交换，即有

引理2.4 若 $\partial\Omega\in C^1$，$u\in H^1(\Omega)$，则 $\gamma u^+=(\gamma u)^+$。

证明 由 $H^1(\Omega)$ 的 $C^1(\bar{\Omega})$ 逼近定理，存在 $u_k\in C^1(\bar{\Omega})$ 使

$$\|u_k-u\|_{1,\Omega}\to 0\ (k\to\infty).\quad u_k\to u\ (k\to\infty), \text{a.e.于}\Omega.$$

对 $C^1(\bar{\Omega})$ 函数 u_k 显然有 $\gamma u_k^+=(\gamma u_k)^+$。

由迹定理，

$$\|\gamma u_k-\gamma u\|_{1/2,\partial\Omega}\to 0\ (k\to\infty),$$

特别地有子列，仍记为 u_k 使

$$\gamma u_k\to\gamma u\ (k\to\infty),\ \text{a.e. 于}\ \partial\Omega.$$

从而

$$(\gamma u_k)^+\to(\gamma u)^+\ (k\to\infty),\ \text{a.e. 于}\ \partial\Omega.$$

现证 $$\|u_k^+-u^+\|_{1,\Omega}\to 0\ (k\to\infty).$$

实际上，显然有

$$\int_\Omega|u_k^+-u^+|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|u_k-u|^2\mathrm{d}x\to 0\ (k\to\infty).$$

由引理2.2计算 u_k^+ 和 u^+ 的导数给出

$$\int_\Omega\left|\frac{\partial u_k^+}{\partial x_i}-\frac{\partial u^+}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x=\int_{u>0,u_k>0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x$$

$$+\int_{u<0,u_k>0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x+\int_{u=0,u_k>0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x$$

$$+\int_{u>0,u_k<0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^4 I_j.$$

我们来计算 I_j 的极限。

$$I_1\leqslant\int_\Omega\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x\to 0\ (k\to\infty).$$

$$I_2=\int_{u<0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\chi\{u_k>0\}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 2\int_{u<0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x+2\int_{u<0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\chi\{u_k>0\}\mathrm{d}x$$

这里 $\chi\{u_k>0\}$ 表示集合 $\{x\mid x\in\Omega, u_k(x)>0\}$ 的特征函数。在集合 $\{u<0\}$ 上有

$$\chi\{u_k>0\}\to 0 \quad (k\to\infty) \quad \text{a.e.}$$

由控制收敛定理

$$\int_{u<0}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\chi\{u_k>0\}\mathrm{d}x\to 0 \quad (k\to\infty).$$

故 $k\to\infty$ 时，$I_2\to 0$。

$$I_3\leqslant\int_{u=0}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right|^2\mathrm{d}x\to\int_{u=0}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x.$$

由引理2.4，

$$\int_{u=0}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x=\int_{u=0}0\,\mathrm{d}x=0,$$

故 $k\to\infty$ 时 $I_3\to 0$。类似地 $I_4\to 0$ $(k\to\infty)$。既然 u_k^+ 在 $H^1(\Omega)$ 中趋于 u^+，由迹定理，γu_k^+ 在 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 中趋于 γu^+，于是有子列 γu_k^+ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处收敛于 γu^+，$(\gamma u)^+=\gamma u^+$ a.e. 于 $\partial\Omega$。 ▌

由于我们要讨论的函数仅是几乎处处定义的，所以需要

定义2.3 设 u 是定义在 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 上的可测函数，若存在常数 K 使 $u(x)\leqslant K$，a.e. 于 Ω，则称 K 是 u 的一个本性上界，u 的最小的本性上界（试证明它一定存在）称为 u 的本性上确界，记为 $\sup\limits_{\Omega} u$。类似地定义本性下界和本性下确界 $\inf\limits_{\Omega} u$。对区域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 和 $u\in H^1(\Omega)$，当 $\partial\Omega\in C^1$ 时定义

$$\sup_{\partial\Omega} u=\sup_{\partial\Omega}\gamma u,\qquad \inf_{\partial\Omega} u=\inf_{\partial\Omega}\gamma u.$$

这里 γu 表示 u 在 $\partial\Omega$ 上的零次迹. 若 u 无本性上(下)界, 则记 $\sup\limits_{\Omega} u = +\infty(\inf\limits_{\Omega} u = -\infty)$.

现考察散度型二阶椭圆算子

$$Lu = -D_j(a_{ij}D_i u) + b_i D_i u + cu$$

和相应双线性型

$$a(u,v) = \int_{\Omega}(a_{ij}D_i u D_j v + b_i(D_i u)v + cuv)\mathrm{d}x.$$

我们假定

$$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega), \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2, \ a_{ij}, b_i, c \text{ 为实函数} \tag{2.45}$$

其中 α 为正的常数.

定义2.4 设 $u \in H^1(\Omega)$, 若对任意 $v \in H_0^1(\Omega), v \geqslant 0$ 有

$$a(u,v) \geqslant 0(\leqslant 0),$$

则称 $Lu \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$.

定理2.10 设二阶椭圆算子 L 的系数满足条件(2.45), 又设 u 的系数在 Ω 上非负, $u \in H^1(\Omega)$满足 $Lu \leqslant 0(\geqslant 0)$则

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^+ \quad (\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u^-).$$

证明 只需对 sup 进行证明. 设 $v \in H_0^1(\Omega), v \geqslant 0$ 且 $uv \geqslant 0$, 由 $Lu \leqslant 0$ 的定义知

$$a(u,v) \leqslant 0.$$

由 $c \geqslant 0$和 $uv \geqslant 0$ 得

$$\int_{\Omega}(a_{ij}D_i u D_j v + b_i(D_i u)v)\mathrm{d}x \leqslant -\int_{\Omega} cuv\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

由系数的有界性

$$\int_{\Omega} a_{ij}D_i u D_j v\mathrm{d}x \leqslant -\int_{\Omega} b_i(D_i u)v\mathrm{d}x \leqslant M\int_{\Omega}|Du|v\mathrm{d}x \tag{2.46}$$

记 $\sup\limits_{\partial\Omega} u^+ = l$，若 $l = +\infty$，结论显然成立，以下设 $l < +\infty$。

由引理2.4，

$$l = \sup_{\partial\Omega} u^+ = \sup_{\partial\Omega} \gamma u^+ = \sup_{\partial\Omega} (\gamma u)^+ \geqslant 0.$$

若定理的结论不成立，则 $\sup\limits_{\Omega} u > l$。对任意 $l \leqslant k < \sup\limits_{\Omega} u$，令 $v = (u-k)^+$，显然 $v \geqslant 0$。由本性上确界定义

$$|\operatorname{supp} v| = \operatorname{meas} \operatorname{supp} v > 0.$$

由引理2.4，

$$\gamma v = \gamma(u-k)^+ = (\gamma u - k)^+ = 0.$$

从而 $v \in H_0^1(\Omega)$，由引理2.2，

$$Dv = \begin{cases} Du, & \text{当 } u > k \text{ 时；} \\ 0, & \text{当 } u \leqslant k. \end{cases}$$

当 $u < 0$ 时，由于 $k \geqslant l \geqslant 0$，必有 $(u-k)^+ = 0$，故 $uv \geqslant 0$。因此可在(2.46)中取 $v = (u-k)^+$，注意到 $u \leqslant k$ 时，$v = 0$，$Dv = 0$，而 $u > k$ 时 $D_i u = D_i v$，故有

$$D_i u D_j v = D_i v D_j v, \qquad |Du| v = |Dv| v.$$

从(2.46)得到

$$\int_\Omega a_{ij} D_i v D_j v \mathrm{d}x \leqslant M \int_\Omega |Dv| v \mathrm{d}x.$$

由 L 的一致连续性，

$$\alpha \int_\Omega |Dv|^2 \mathrm{d}x \leqslant M \|Dv\|_0 \|v\|_0,$$

从而

$$\|Dv\|_0 \leqslant \frac{M}{\alpha} \|v\|_0.$$

由嵌入定理和 Hölder 不等式

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C\|Dv\|_0 \leqslant \frac{CM}{\alpha} \|v\|_0 \leqslant C' \|v\|_{L^p(\Omega)} |\operatorname{supp} v|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}},$$

其中，对 $n\geqslant 3$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$，对 $n=2$，$p>2$任意。

由 $|\operatorname{supp}v|>0$ 知 $\|v\|_{L^p(\Omega)}>0$，故有

$$|\operatorname{supp}v|\geqslant C'^{-s}>0,$$

其中 C' 与 k 无关。若 $\sup\limits_{\Omega}u=+\infty$，则对任意 $k>l$ 将有

$$|u>k|=|\{x\in\Omega\,|\,u(x)>k\}|\geqslant C'^{-s}>0.$$

这跟 u 的可积性矛盾，故必有 $\sup\limits_{\Omega}u<+\infty$。令 k 单调上升趋于 $\sup\limits_{\Omega}u$，我们得

$$\left|u=\sup_{\Omega}u\right|\geqslant C'^{-s}.$$

即 u 在一个正测度集上取到本性上确界。

记 $\tilde{v}=(u-l)^+$，取 $V=\sup\limits_{\Omega}\tilde{v}=\sup\limits_{\Omega}u-l>0$，在(2.46)中令 v 是

$$\frac{\tilde{v}}{V+\varepsilon-\tilde{v}}=-1+\frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-\tilde{v}}\ (\varepsilon>0).$$

由引理2.1($f(t)=t^{-1},t\in[\varepsilon,+\infty)$)，$v\in H^1(\Omega)$，易知 $\gamma v=0$，

$$D_jv=\frac{(V+\varepsilon)D_j\tilde{v}}{(V+\varepsilon-\tilde{v})^2}.$$

注意到在集合 $\{u\leqslant l\}$ 上 $D_i\tilde{v}=0$，在集合 $\{u>l\}$ 上 $D_iu=D_i\tilde{v}$，我们得到

$$\int_{\Omega}a_{ij}D_iuD_jv\mathrm{d}x=\int_{\Omega}a_{ij}D_iu\frac{(V+\varepsilon)D_j\tilde{v}}{(V+\varepsilon-\tilde{v})^2}\mathrm{d}x,$$

$$=\int_{u>l}a_{ij}D_i\tilde{v}\frac{(V+\varepsilon)D_j\tilde{v}}{(V+\varepsilon-\tilde{v})^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_\Omega a_{ij} D_i \tilde{v} \frac{(V+\varepsilon) D_j \tilde{v}}{(V+\varepsilon-\tilde{v})^2} dx,$$

$$\int_\Omega |Du| \frac{\tilde{v}}{V+\varepsilon-\tilde{v}} = \int_{u>l} \frac{\tilde{v}|D\tilde{v}|}{V+\varepsilon-\tilde{v}} \leqslant V \int_{u>l} \frac{|D\tilde{v}|}{V+\varepsilon-\tilde{v}},$$

$$\int_\Omega a_{ij} \frac{D_i \tilde{v} D_j \tilde{v}}{(V+\varepsilon-\tilde{v})^2} dx \leqslant M \int_\Omega \frac{|D\tilde{v}|}{V+\varepsilon-\tilde{v}} dx.$$

令

$$\omega_\varepsilon = \ln \frac{V+\varepsilon}{V+\varepsilon-\tilde{v}} \in H_0^1(\Omega),$$

由一致椭圆性

$$\int_\Omega |D\omega_\varepsilon|^2 dx \leqslant \frac{M}{\alpha} \int_\Omega |D\omega_\varepsilon| dx \leqslant \frac{M}{\alpha} \left(\int_\Omega |D\omega_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} |\Omega|^{1/2}.$$

从而

$$\|D\omega_\varepsilon\|_0 \leqslant \frac{M}{\alpha}.$$

由 Poincaré 不等式

$$\|\omega_\varepsilon\|_0 \leqslant C \|D\omega_\varepsilon\|_0 \leqslant \frac{CM}{\alpha},$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，由 Fatou 引理

$$\|\omega_0\|_0 = \left\| \ln \frac{V}{V-\tilde{v}} \right\|_0 \leqslant \frac{CM}{\alpha}.$$

但在一个正测度集上 $V = \tilde{v}$，$\omega_0 = \infty$，这与可积性矛盾。故必有 $\sup\limits_\Omega u \leqslant l$。 ▌

推论2.2 在定理2.10关于 L 的系数的假定之下，若 $u \in$

$H_0^1(\Omega)$满足 $Lu=0$，则u在Ω上几乎处处为零。

§5 Fredholm 抉择性质的应用

5.1 Gårding 不等式

定理2.11 设共轭双线性型

$$a(u,v)=\int_\Omega (a_{ij}D_i u D_j \bar{v}+b_i(D_i u)\bar{v}+cu\bar{v})\,\mathrm{d}x$$

的系数满足条件 $a_{ij}\in C(\bar{\Omega})$，$b_i, c\in L^\infty(\Omega)$，$i,j=1,\cdots,n$，$\Omega$有界和一致强椭圆条件

$$\mathrm{Re}\,a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\quad \forall\xi\in \boldsymbol{R}^n,\quad \alpha>0\text{是常数},$$

则存在 $\delta'>0$ 和 $\lambda\geqslant 0$ 使

$$\mathrm{Re}(v,v)+\lambda\|v\|_0^2\geqslant\delta'\|v\|_1^2,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.47}$$

证明 由于 $C_0^\infty(\Omega)$在 $H_0^1(\Omega)$中稠密，只需对 $v\in C_0^\infty(\Omega)$证明(2.47)式。

(i) 设 a_{ij} 为常数，b_i 和 c 全为零，令 v 在 Ω 外为零，仍记之为 v，由 Parseval 等式，记 v 的 Fourier 变换为 $\hat{v}$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,a(v,v)&=\mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n} a_{ij}D_i v\overline{D_j v}\,\mathrm{d}x\\&=\mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n} a_{ij}(\mathrm{i}\xi_i\hat{v})\,\overline{(\mathrm{i}\xi_j\hat{v})}\,\mathrm{d}\xi\\&=\mathrm{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n} a_{ij}\xi_i\xi_j|\hat{v}|^2\mathrm{d}\xi\\&=\int_{\boldsymbol{R}^n}\mathrm{Re}\,a_{ij}\xi_i\xi_j|\hat{v}|^2\mathrm{d}\xi\\&\geqslant\delta\int_{\boldsymbol{R}^n}|\xi|^2|\hat{v}|^2\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$=\delta\int_{R^n}(1+|\xi|^2)|\hat{v}|^2 d\xi-\delta\int_{R^n}|\hat{v}|^2 d\xi$$

$$=c_1\delta\|v\|_1^2-c_2\delta\|v\|_0^2,$$

即(2.47)成立。

(ii) 设 $a_{ij}\in C(\bar{\Omega})$，$b_i$ 和 c 全为零，因为闭区域上的连续函数必一致连续，对一待定常数 $\varepsilon>0$，存在 $\rho>0$，使对任意 $x,y\in\Omega$，当 $|x-y|<\rho$ 时有

$$|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)|<\varepsilon,\qquad i,j=1,\cdots,n.$$

设 v 的支集

$$\operatorname{supp}v\subset B_\rho(x_0)\subset\Omega,$$

由(i)的结果得到

$$\operatorname{Re}a(v,v)=\operatorname{Re}\left[\int_\Omega a_{ij}(x_0)D_ivD_j\bar{v}dx\right.$$

$$\left.+\int_{B_\rho(x_0)}(a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0))D_ivD_j\bar{v}dx\right]$$

$$\geqslant c_1\delta\|v\|_1^2-c_2\delta\|v\|_0^2-\varepsilon n^2\|v\|_1^2.$$

取定 $\varepsilon=c_1\delta/2n^2$，从而取定 $\rho=\rho(\delta,n)$，则有

$$\operatorname{Re}a(v,v)\geqslant\frac{c_1\delta}{2}\|v\|_1^2-c_2\delta\|v\|_0^2.$$

(iii) $\rho=\rho(\delta,n)>0$ 由(ii)取定，取 $\bar{\Omega}$ 的一个开球覆盖 $\{B_i\}_{i=1}^N$，B_i 的直径 $<\rho$。设 $\{\alpha_i\}_{i=1}^N$ 是从属于 $\{B_i\}_{i=1}^N$ 的一个单位分解，

$$\sum_{i=1}^N\alpha_i=1,\quad\bar{\Omega}\text{ 上。}$$

令

$$\beta_i(x)=\alpha_i(x)\left[\sum_{i=1}^N\alpha_i^2(x)\right]^{-1/2},$$

则有

$$\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2(x)\right]^{1/2}\geqslant\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(x)N^{-1/2}=N^{-1/2},\quad x\in\Omega,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_i^2(x)=1,\quad x\in\Omega,\quad \operatorname{supp}\beta_i\subset B_i.$$

对任意 $v\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$a(v,v)=\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega\beta_k^2 a_{ij}D_i vD_j\bar{v}\mathrm{d}x+\int_\Omega(b_i(D_iu)\bar{v}+c|v|^2)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}D_i(\beta_k v)D_j(\beta_k\bar{v})\mathrm{d}x+\int_\Omega(b_i(D_iu)\bar{v}+c|v|^2)\mathrm{d}x$$

$$-\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}((D_i\beta_k)v\beta_kD_j\bar{v}+\bar{v}D_iv\beta_kD_j\beta_k$$

$$+D_i\beta_k(D_j\beta_k)|v|^2)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}D_i(\beta_k v)D_j(\beta_k\bar{v})\mathrm{d}x-c\|v\|_1\|v\|_0.$$

由于 $\operatorname{supp}(\beta_k v)\subset B_k$，$B_k$ 的直径 $<\rho$，由(ii)，

$$a(v,v)\geqslant\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{c_1\delta}{2}\|\beta_kv\|_1^2-c_2\delta\|\beta_kv\|_0^2\right)-c\|v\|_1\|v\|_0$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{c_1\delta}{2}\int_\Omega\left(\beta_k^2|v|^2+\sum_{s=1}^{n}\beta_k^2\left|\frac{\partial v}{\partial x_s}\right|^2\right)\mathrm{d}x-c_2\delta\|\beta_kv\|_0^2\right)$$

$$-c'\|v\|_1\|v\|_0$$

$$\geqslant\frac{c_1\delta}{2}\|v\|_1^2-c_2\delta\|v\|_0^2-c'\|v\|_1\|v\|_0$$

$$\geqslant\frac{c_1\delta}{4}\|v\|_1^2-\lambda\|v\|_0^2.\quad \blacksquare$$

5.2 二阶椭圆型方程解的存在性准则

我们以齐次 Dirichlet 问题为例说明如何应用 Riesz-Schauder 的紧算子理论讨论强制条件未必满足时解的存在性。先复习一下有关的泛函分析知识。

定义2.5 Hilbert 空间 H 上的到自身的线性算子 T 称为紧的，若对任何有界序列 $u_n \in H$，Tu_n 包含一个收敛子序列。

易见，紧的线性算子一定是有界的。

定义2.6 设 $T \in \mathscr{L}(H) \equiv \mathscr{L}(H,H)$，$\mathscr{L}(H)$ 是 H 到自身的有界线性算子全体，定义共轭算子 T^* 如下：

$$(Tu,v) = (u,T^*v), \quad \forall u,v \in H.$$

这里 (,) 是 H 中的内积，对任意 $v \in H$，T^*v 的存在性由 Riesz 表示定理推出。

定理2.12(Riesz-Schauder) 设 T 是 Hilbert 空间 H 到自身的紧算子，则其共轭算子 T^* 亦为紧算子，对 $f \in H$，方程

$$(I-T)u = f$$

有解的充分必要条件是 f 与齐次方程

$$(I-T^*)u^* = 0$$

的所有解 u^* 正交。又以下两个齐次方程

$$(I-T^*)u^* = 0 \text{ 和 } (I-T)u = 0$$

有有限个同样数目的线性无关的解。

这个定理的证明请见 Yosida《泛函分析》第十章 § 4,5。

推论2.3 在定理 2.12 的条件下，对任意 $f \in H$，方程 $(I-T)u = f$ 都有解的充分必要条件是齐次方程 $(I-T)u = 0$

只有零解。

定理2.13 在定理2.11的条件之下，且设 $a_{ij}\in C^1(\bar{\Omega})$，$\partial\Omega\in C^2$，则变分方程

$$u\in H_0^1(\Omega),a(u,v)=(f,v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

有解的充分必要条件是 f 与共轭变分方程

$$u^*\in H_0^1(\Omega),a(v,u^*)=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

的所有解 u^* 在 $L^2(\Omega)$ 中正交，又上述齐次共轭变分方程与下列齐次变分方程

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad a(u,v)=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

有同样数目的有限个线性无关的解。

证明 由定理2.11提供的 Gårding 不等式，存在$\delta,\lambda>0$使

$$a(v,v)+\lambda\|v\|_0^2\geqslant\delta\|v\|_1^2,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由 Lax-Milgram 定理，对任意 $f\in L^2(\Omega)$，变分方程

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad a(u,v)+\lambda(u,v)=(f,v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

存在唯一解 $u=Gf\in H_0^1(\Omega)$，且 G 为 $L^2(\Omega)$到 $H_0^1(\Omega)$ 的有界算子。又嵌入 $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$是紧嵌入，故$G$看作 $L^2(\Omega)$到自身的算子是紧算子。现对任意 $f\in L^2(\Omega)$考虑方程

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad a(u,v)=(f,v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

这相当于

$$a(u,v)+\lambda(u,v)-\lambda(u,v)=(f,v),$$
$$a(u,v)+\lambda(u,v)=(f+\lambda u,v),$$
$$u=G(f+\lambda u),$$
$$u-\lambda Gu=Gf.$$

由定理2.12，最后这个方程有解的充分必要条件是 Gf 与共轭齐次方程

$$u^*-\lambda G^*u^*=0$$

的所有解 u^* 在 $L^2(\Omega)$ 中正交：

$$(Gf,u^*)=0.$$

由共轭算子的定义，此即

$$(f,G^*u^*)=0.$$

而 $G^*u^*=\lambda^{-1}u^*$，故 $(f,u^*)=0$。

再由 T 的定义，对任意 $u\in L^2(\Omega)$，应有

$$(Gu,u^*)=(u,G^*u^*).$$

再由 $G^*u^*=\lambda^{-1}u^*$ 得

$$(Gu,\lambda u^*)=(u,u^*).$$

由 G 的定义，若 $u^*\in H_0^1(\Omega)$，则有

$$a(Gu,u^*)+\lambda(Gu,u^*)=(u,u^*).$$

与上式比较得到

$$a(Gu,u^*)=0,\quad \forall u\in L^2(\Omega).$$

由 Lax-Milgram 定理，G 是 $H^{-1}(\Omega)$ 到 $H_0^1(\Omega)$ 的同构，而 $L^2(\Omega)$ 在 $H^{-1}(\Omega)$ 中稠密，故 $G(L^2(\Omega))$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密（由下节知 $G(L^2(\Omega))=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，稠密性直接可得），从而 u^* 满足

$$a(v,u^*)=0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

现证实际上 $u^*\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。对任意 $u,v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，由分部积分得

$$a(u,v)=\int_\Omega (a_{ij}D_iuD_j\bar{v}+b_i(D_iu)\bar{v}+cu\bar{v})\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega\left(-\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu\right)\bar{v}\mathrm{d}x$$

$$=\int_\Omega u\overline{\left(-u\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}_{ij}D_jv)-\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{b}_iv)+\bar{c}v\right)}\mathrm{d}x.$$

令

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}D_iu) + b_iD_iu + cu,$$

$$L^*u = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{a}_{ij}D_jv) - \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{b}_iv) + \bar{c}v,$$

L^* 称为 L 的形式共轭算子，则有

$$a(u,v) = (Lu,v) = (u,L^*v).$$

由下节的正则性定理，$L+\lambda$ 和 $L^*+\lambda$ 都是 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 到$L^2(\Omega)$上的有界线性算子，它们的逆$(L+\lambda)^{-1}$和$(L^*+\lambda)^{-1}$ 是 $L^2(\Omega)$到 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$上的有界线性算子，且易知

$$G = (L+\lambda)^{-1},\quad G^* = (L^*+\lambda)^{-1}.$$

实际上对任意 $u,v\in L^2(\Omega)$，

$$(Gu,v) = (Gu,(L^*+\lambda)(L^*+\lambda)^{-1}v) = ((L+\lambda)Gu,$$
$$(L^*+\lambda)^{-1}v) = (u,(L^*+\lambda)^{-1}v),$$

这就说明

$$G^* = (L^*+\lambda)^{-1}.$$

于是由 $\lambda^{-1}u^* = G^*u^* = (L^*+\lambda)^{-1}u^*$ 知

$$u^*\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

且 $\lambda^{-1}u^* = G^*u^*$ 等价于 $L^*u^* = 0$ 或

$$u^*\in H_0^1(\Omega),\quad a(v,u^*) = 0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由定理2.12方程

$$u - \lambda Gu = 0,\quad u^* - \lambda G^*u = 0$$

有同样数目（有限）的线性无关解，这两个方程分别等价于 $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), Lu = 0, u^*\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), L^*u^* = 0$，或等价于

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad a(u,v) = 0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$
$$u^*\in H_0^1(\Omega), a(v,u^*) = 0,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \quad \blacksquare$$

推论2.4 保持定理2.13的条件，且设系数都是实函数，$c \geqslant 0$，则对任意实函数 $f \in L^2(\Omega)$ 存在 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足方程

$$Lu = f.$$

对齐次 Neumann 条件，定理2.13的类似结论亦成立，即对任意 $f \in L^2(\Omega)$，方程

$$u \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

有解的充分必要条件是 f 与下列方程的所有解 u^* 正交：

$$u^* \in H^1(\Omega), a(v,u^*) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

例 考虑 Poisson 方程的 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega\text{内}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \partial\Omega\text{上}. \end{cases}$$

这等价于在 $H^1(\Omega)$ 内解变分方程

$$\int_\Omega Du \cdot Dv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

这里假设了 $f \in L^2(\Omega)$。共轭齐次方程是

$$u^* \in H^1(\Omega), \int_\Omega Dv \cdot Du^* \mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

取 $v = u^*$ 得

$$\int_\Omega |Du^*|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

从而 u^* 在Ω上几乎处处为常数。上述 Neumann 问题有解的充分必要条件是

$$\int_\Omega f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

如果 u 表示以密度 f 受热的物体Ω各点的温度，其表面 $\partial\Omega$ 处处绝热，则要使物体各点温度不随时间变化，必须供给的总热量 $\int_\Omega f \mathrm{d}x$ 为零。

§6 解的正则性

6.1 差商方法的范例

前面在 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega \text{ 内;} \\ u = g, & \partial\Omega \text{上} \end{cases}$$

的讨论中，我们假设 $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$，得到的解 $u \in H^1(\Omega)$。当 $f \in L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$, $g \in H^{3/2}(\partial\Omega)$，$\partial\Omega \in C^2$ 时我们将证明 $u \in H^2(\Omega)$。一般地，若 $f \in H^k(\Omega)$，$g \in H^{k+3/2}(\partial\Omega)$，$\partial\Omega \in C^{k+2}$，则 $u \in H^{k+2}(\Omega)$，由嵌入定理，当 k 适当大时，我们将得到 u 是古典解。这就是所谓解的正则性问题。

谨以上述 Dirichlet 问题当 $\Omega = \boldsymbol{R}^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n > 0\}$，$g = 0$ 时这一特例来阐明差商方法的精髓。诚如一再所说，u 所满足的是变分方程

$$u \in H^1_0(\boldsymbol{R}^n_+), \int_{\boldsymbol{R}^n_+} Du \cdot Dv\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H^1_0(\boldsymbol{R}^n_+).$$

u 的正则性的信息即包含在这一变分方程中。为提取这一信息，我们取 $v \in H^1_0(\boldsymbol{R}^n_+)$ 的差商

$$\Delta^i_h v(x) = (v(\cdots, x_i + h, \cdots) - v(\cdots, x_i, \cdots))/h,$$
$$i = 1, \cdots, n-1$$

代替变分方程中的 v 即得

$$\int_{\boldsymbol{R}^n_+} Du \cdot D\Delta_h v\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} f\Delta_h v\mathrm{d}x.$$

把对检验函数的差商转移到解上，

$$\int_{\boldsymbol{R}^n_+} Du \cdot D(\Delta_h v)\mathrm{d}x = \int_{\boldsymbol{R}^n_+} Du \cdot (Dv(\cdots, x_i + h, \cdots)$$

$$-Dv(\cdots,x_i,\cdots))/h\mathrm{d}x$$

$$=\int_{R_+^n}-(Du(\cdots,x_i-h,\cdots)-Du(\cdots,x_i,\cdots))/(-h)\,Dv\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{R_+^n}D\Delta_{-h}u\cdot Dv\mathrm{d}x,$$

便得到

$$\int_{R_+^n}D\Delta_{-h}u\cdot Dv\mathrm{d}x=-\int_{R_+^n}f\Delta_h v\mathrm{d}x.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\int_{R^n}D\Delta_{-h}u\cdot Dv\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_0\|\Delta_h v\|_0.$$

我们将证明

$$\|\Delta_h v\|_0\leqslant\|D_i v\|_0\leqslant\|Dv\|_0,\quad \forall v\in H_0^1(\boldsymbol{R}_+^n).\quad(2.48)$$

于是有

$$\int_{R_+^n}D\Delta_{-h}u\cdot Dv\mathrm{d}x\leqslant\|f\|_0\|Dv\|_0,\quad \forall v\in H_0^1(\boldsymbol{R}_+^n).$$

取 $v=\Delta_{-h}u$,

$$\int_{R_+^n}|D\Delta_{-h}u|^2\mathrm{d}x=\|D\Delta_{-h}u\|_0^2\leqslant\|f\|_0\|D\Delta_{-h}u\|,$$

从而

$$\|\Delta_{-h}(D_j u)\|_0\leqslant\|f\|_0,\quad j=1,\cdots,n.$$

我们将证明若 $v\in L^2(\boldsymbol{R}_+^n)$, $\|\Delta_{-h}^i v\|_0\leqslant C$, C 与 h 无关，则

$$D_i v\in L^2(\boldsymbol{R}_+^n).\quad(2.49)$$

于是

$$D_i(D_j u)\in L^2(\boldsymbol{R}_+^n),\quad j=1,\cdots,n,i=1,\cdots,n-1.$$

由方程 $-\Delta u=f$ 得

$$D_{nn}u=-\sum_{i=1}^{n-1}D_{ii}u-f\in L^2(\boldsymbol{R}_+^n),$$

故 $u\in H^2(\boldsymbol{R}_+^n)$。

我们看到基本方法是取检验函数的差商作检验函数，而其理论基础是关于差商的性质(2.48)和(2.49)。

6.2 Sobolev空间和差商

引理2.5 设 $u\in W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega'\subset\subset\Omega$, $0<|h|<\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$，则

$$\|\Delta_h^i u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\|D_i u\|_{L^p(\Omega)}. \qquad (2.50)$$

证明 由逼近定理，可设 $u\in C^1(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$，由一元函数积分的 Newton-Leibniz 公式

$$\Delta_h u=(u(\cdots,x_i+h,\cdots)-u(\cdots,x_i,\cdots))/h$$

$$=\frac{1}{h}\int_0^h D_i u(\cdots,x_i+\xi,\cdots)\mathrm{d}\xi,$$

由 Minkowski 不等式

$$\|\Delta_h u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\frac{1}{|h|}\left|\int_0^h\|D_i u(\cdots,x_i+\xi,\cdots)\|_{L^p(\Omega')}\mathrm{d}\xi\right|,$$

其中 $L^p(\Omega')$范数是对变量 x 取的。由变量替换得

$$\|D_i u(\cdots,x_i+\xi,\cdots)\|_{L^p(\Omega')}=\|D_i u(x)\|_{L^p(\Omega'_\xi)},$$

这里

$$\Omega'_\xi=\Omega'+\xi e_i\subset\Omega,\quad |\xi|\leqslant|h|<\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega).$$

故

$$\|D_i u(\cdots,x_i+\xi,\cdots)\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\|D_i u\|_{L^p(\Omega)},$$

$$\|\Delta_h u\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\frac{1}{|h|}|h'|\sup_{|\xi|<|h|}\|D_i u(\cdots,x_i+\xi,\cdots)\|_{L^p(\Omega')},$$

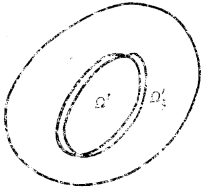


图 12

$\leqslant \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$. ∎

引理2.6 设 $u \in L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$, 存在常数 K, 使对所有 $\Omega' \subset\subset \Omega$, $0<h<\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ 有估计

$$\|\Delta_h u\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K,$$

则弱导数 $D_i u$ 存在且有估计

$$\|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K. \tag{2.51}$$

证明 利用 $L^p(\Omega)$ 中有界集的弱紧性，并经由对角线手续，可取 $h_m \to 0$ $(m \to \infty)$，使在 $L^p(\Omega')$ 中

$$\Delta_{h_m} u \rightharpoonup v \quad (m \to \infty), \quad \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega.$$

其中半箭头表示弱收敛。今证 v 是弱导数 $D_i u$。对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，由弱收敛定义，$m \to \infty$ 时，

$$\int_\Omega \varphi \Delta_{h_m} u \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \varphi v \,\mathrm{d}x.$$

当 $0<h_m<\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial\Omega)$，我们有

$$\int_\Omega \varphi \Delta_{h_m} u \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta_{-h_m} \varphi \,\mathrm{d}x \to -\int_\Omega u D_i \varphi \,\mathrm{d}x,$$

因此

$$-\int_\Omega u D_i \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \varphi v \,\mathrm{d}x,$$

由弱导数定义即得

$$D_i u = v.$$

又由范数关于弱收敛的下半连续性，对任意$\Omega' \subset\subset \Omega$，

$$\|v\|_{L^p(\Omega')} \leqslant \underline{\lim}\|\Delta_{h_m} u\|_{L^p(\Omega')} \leqslant K,$$

由 Ω' 的任意性得

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leqslant K. \quad \blacksquare$$

6.3 弱解的内部正则性

定理2.14 设$\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$，算子

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

的系数满足条件

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b_i, c \in L^\infty(\Omega),$$

$$\mathrm{Re}\, a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, \quad x \in \Omega \text{ （一致强椭圆性）}.$$

又设 $f \in L^2(\Omega)$，$u \in H^1(\Omega)$满足

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega (a_{ij}D_i u D_j \bar{v} + b_i(D_i u)\bar{v} + cu\bar{v})\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f\bar{v}\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{2.52}$$

则对任意子区域 $\Omega' \subset\subset \Omega$，有 $u \in H^2(\Omega')$ 且有估计

$$\|u\|_{2,\Omega'} \leqslant C(\|u\|_{1,\Omega} + \|f\|_{0,\Omega}), \tag{2.53}$$

其中 $C = C(n, \delta, \Omega', \|a_{ij}\|_{C^1}, \|b_i\|_{L^\infty}, \|c\|_{L^\infty})$。又 u 在 Ω 中几乎处处满足

$$Lu = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f.$$

证明 由等式(2.52)，分出主要部分得

$$\int_\Omega a_{ij}D_iuD_j\bar{v}=\int_\Omega g\bar{v}\mathrm{d}x,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),\qquad (2.54)$$

这里

$$g=f-b_iD_iu-cu\in L^2(\Omega),\ \|g\|_{0,\Omega}\leqslant\|f\|+C\|u\|_1.$$

现设 $v\in H^1(\Omega)$, $\mathrm{supp}v\subset\Omega$, $0<|h|<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}v,\partial\Omega)$, $1\leqslant k\leqslant n$, 在(2.54)中取 v 为 $\Delta_{-h}^k v=\Delta_{-h}v$, 我们得到

$$\int_\Omega \Delta_h(a_{ij}D_iu)D_i\bar{v}\mathrm{d}x=-\int_\Omega a_{ij}D_iuD_j\Delta_{-h}v\mathrm{d}x$$
$$=-\int_\Omega g\Delta_{-h}v\mathrm{d}x.$$

因为

$$\Delta_h(a_{ij}D_iu)(x)=a_{ij}(x+he_k)\Delta_hD_iu(x)+\Delta_ha_{ij}(x)D_iu(x),$$
$$e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0),$$

于是有

$$\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)D_i\Delta_huD_j\bar{v}\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\vec{g}\cdot D\bar{v}+g\Delta_{-h}\bar{v})\mathrm{d}x,$$

其中

$$\vec{g}=(g_1,\cdots,g_n),\ g_j(x)=\Delta_ha_{ij}(x)D_iu(x).$$

由 $a_{ij}\in C^1(\bar{\Omega})$知$|\Delta_ha_{ij}(x)|\leqslant\|a_{ij}\|_{C^1(\bar{\Omega})}$, 从而

$$\|\vec{g}\|_0=\|(|g_1|^2+\cdots+|g_n|^2)^{1/2}\|_0\leqslant C\|u\|_1.$$

由差商的估计 $\|\Delta_h\bar{v}\|_0\leqslant\|D_kv\|_0$ 我们得

$$\mathrm{Re}\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)D_i\Delta_huD_j\bar{v}\mathrm{d}x\leqslant C_1(\|\vec{g}\|_0+\|g\|_0)\|Dv\|_0$$
$$\leqslant C(\|u\|_1+\|f\|_0)\|Dv\|_0.\qquad (2.55)$$

设 $\eta\in C_0^1(\Omega)$, $0\leqslant\eta\leqslant1$, 令

$$v=\eta^2\Delta_hu,\ 0<|h|<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\eta,\partial\Omega),$$

由差商通过导数的估计、一致强椭圆条件、Gårding 不等式和(2.55)推出存在 $\delta',\lambda>0$ 使

$$
\begin{aligned}
&-\lambda\|\eta\Delta_h u\|^2+\delta'\int_\Omega|D\eta\Delta_h u|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant \mathrm{Re}\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)D_i(\eta\Delta_h u)D_j(\eta\Delta_h\bar{u})\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{Re}\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)(D_i\eta\Delta_h u+\eta D_i\Delta_h u)\\
&\qquad\times(D_j\eta\Delta_h\bar{u}+\eta D_j\Delta_h\bar{u})\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_2(\|u\|_1^2+\|u\|_1\|\eta D\Delta_h u\|_0)\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)D_i\Delta_h u(D_j\bar{v}-2\eta D_i\eta\Delta_h\bar{u})\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_3(\|u\|_1^2+\|u\|_1\|\eta D\Delta_h u\|_0)\\
&\quad+\mathrm{Re}\int_\Omega a_{ij}(x+he_k)D_i\Delta_h u D_j\bar{v}\mathrm{d}x\\
&\leqslant C_3(\|u\|_1^2+\|u\|_1\|\eta D\Delta_h u\|_0)\\
&\quad+C_1(\|u\|_1+\|f\|_0)(\|u\|_1+\|\eta D\Delta_h u\|_0),
\end{aligned}
$$

由此利用不等式

$$|ab|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

易得

$$\|D(\eta\Delta_h u\|_0^2\leqslant C(\|u\|_1^2+\|f\|_0^2). \tag{2.56}$$

对 $\Omega'\subset\subset\Omega$，取 η 为 Ω' 的截断函数，$\eta|_{\Omega'}=1, |D\eta|\leqslant\frac{2}{d}$，$d=\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega)$，由(2.56)得

$$\|D\Delta_h u\|_{0,\Omega'}\leqslant C(\|u\|_1+\|f\|_0),\quad |h|<\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\eta,\partial\Omega).$$

由引理2.6得到

$$\|D_{ij}u\|_{0,\Omega'}\leqslant C(\|u\|_1+\|f\|_0),\quad i,j=1,\cdots,n,$$

即

$$u\in H^2(\Omega'). \quad \blacksquare$$

6.4 弱解的全局正则性

定理2.15 设定理2.14的条件成立，又设 $\partial\Omega\in C^2$，

$g\in H^{3/2}(\partial\Omega)$，则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} Lu=f, & \Omega\text{内}; \\ u=g, & \partial\Omega\text{上} \end{cases}$$

的解 $u\in H^2(\Omega)$ 且有估计

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant C(\|u\|_0+\|f\|_0+\|g\|_{3/2,\partial\Omega}). \qquad (2.57)$$

证明 由于 $\partial\Omega\in C^2$，对每一点 $x_0\in\partial\Omega$，存在一个领域 O 和一个 $\bar{O}$ 到 $\bar{B}=\bar{B}_1=\overline{B_1(0)}$ 上的映射 $\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$，$\varphi$ 和 φ^{-1} 都属 C^2，使

$$\varphi(O\cap\Omega)B^+=\{x\in B_1(0)\,|\,x_n>0\},\varphi(O\cap\partial\Omega)$$
$$=\Sigma=\{x\in B_1(0)\,|\,x_n=0\}.$$

先设 $u\in H_0^1(\Omega)$，即 $g=0$，取 $v\in H_0^1(\Omega)$，$\mathrm{supp}v\subset O$，并作变量替换

$$y=\varphi(x),\quad u(\varphi^{-1}(y))=\tilde{u}(y),$$

不妨设 Jacobi 行列式 $\partial x/\partial y=1$。由(2.52)得

$$\begin{aligned} a(u,v)&=\int_\Omega(a_{ij}D_iuD_j\bar{v}+b_i(D_iu)\bar{v}+cu\bar{v})\,\mathrm{d}x \\ &=\int_{O\cap\Omega}(a_{ij}D_iuD_j\bar{v}+b_i(D_iu)\bar{v}+cu\bar{v})\,\mathrm{d}x \\ &=\int_{B^+}\left(a_{ij}\tilde{D}_k\tilde{u}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\tilde{D}_l\bar{\tilde{v}}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}+b_i\tilde{D}_k\tilde{u}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\bar{\tilde{v}}+c\tilde{u}\bar{\tilde{v}}\right)\mathrm{d}y \\ &=\int_{B^+}(\tilde{a}_{kl}\tilde{D}_k\tilde{u}\tilde{D}_l\bar{\tilde{v}}+\tilde{b}_k(\tilde{D}_k\tilde{u})\bar{\tilde{v}}+\tilde{c}\tilde{u}\bar{\tilde{v}})\,\mathrm{d}y \\ &=\int_{B^+}\tilde{f}\bar{\tilde{v}}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中

$$\tilde{a}_{kl}=a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j},\quad \tilde{b}_k=b_i\frac{\partial y_k}{\partial x_i},\quad \tilde{c}(y)=c(x),\quad \tilde{D}_k=\frac{\partial}{\partial y_k}.$$

一致强椭圆条件仍保持。实际上，对任意 $\xi\in\boldsymbol{R}^n$，

$$\|\xi\| = 1,$$

$$\operatorname{Re}\tilde{a}_{kl}\xi_k\xi_l = \operatorname{Re}a_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\xi_k\xi_l$$

$$= \operatorname{Re}a_{ij}\frac{\partial(\xi_k y_k)}{\partial x_i}\frac{\partial(\xi_l y_l)}{\partial y_j} \geqslant \delta|D(\xi_k y_k)|^2.$$

我们有$|D(\xi_k y_k)|^2 \neq 0$，因否则

$$\xi_k\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

而系数行列式$\frac{\partial y}{\partial x} = 1$，齐次方程组只能有零解$\xi$，与$|\xi| = 1$矛盾。于是

$$\min_{|\xi|=1,\, x\in\bar{O}} |D(\xi_k y_k)|^2 = \delta_1 > 0,$$

$$\tilde{a}_{kl}\xi_k\xi_l \geqslant \delta\delta_1 > 0, \quad \forall y\in\bar{B}_+, \xi\in\boldsymbol{R}^n, \quad |\xi| = 1.$$

取消符号“$\sim$”，则有$u\in H^1(B^+)$满足

$$\int_{B^+}(a_{kl}D_k u D_l\bar{v} + b_k(D_k u)\bar{v} + cu\bar{v})\mathrm{d}y = \int_{B^+} f\bar{v}\mathrm{d}y,$$

$$\forall v\in H_0^1(B^+).$$

由于现在已把边界$\partial\Omega\cap O$展平，当$v\in H^1(B^+)$，$\operatorname{supp}v\subset B$时，考虑差商

$$\Delta_h u = \Delta_h^i u, \quad i = 1, \cdots, n-1,$$

跟在6.3中的推理一样，取

$$\eta\in C_0^1(B), \quad \eta(y) = 1, \quad y\in B_{1/2}(0),$$

我们得到

$$\|D_{ij}u\|_{0,B_{1/2}^+} \leqslant C(\|u\|_{0,B^+} + \|f\|_{0,B^+}), \quad (i,j)\neq(n,n).$$

由$\operatorname{Re}a_{nn} \geqslant \delta\delta'$推知

$$\|D_{nn}u\|_{0,B^+_{1/2}}\leqslant C(\|u\|_{0,B^+}+\|f\|_{0,B^+}).$$

回到变量 x，即知存在 x_0 的一个领域 $O'\subset O$ 使

$$\|D_{ij}u\|_{0,O'\cap\Omega}\leqslant C(\|u\|_{1,\Omega}+\|f\|_{0,\Omega}).$$

根据有限复盖定理，存在$\{O'_i\}_{i=1}^N\supset\partial\Omega$，使在每一$O'_i$上有上述估计。取$O'_0\subset\subset\Omega$，使$\{O'_i\}_{i=0}^N\supset\partial\Omega$，在$O'_0$上由内部正则性，上述估计亦成立，故在整个$\Omega$上有估计

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant C(\|u\|_1+\|f\|_0).$$

这样在情形 $u\in H_0^1(\Omega)$ 上定理得证。

对一般的 $g\in H^{3/2}(\partial\Omega)$，由迹定理，存在 $u_0\in H^2(\Omega)$ 使 $\gamma u_0=g$，且满足

$$\|u_0\|_{2,\Omega}\leqslant C\|g\|_{3/2,\partial\Omega}.$$

令 $u=u_0+w$，则 $\gamma w=0$，且 w 满足

$$a(w,v)=(f,v)-a(u_0,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由分部积分

$$\begin{aligned}a(u_0,v)&=\int_\Omega(a_{ij}D_iu_0D_j\bar v+b_i(D_iu_0)\bar v+cu\bar v)\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega(-D_j(a_{ij}D_iu_0)+b_iD_iu_B+cu_0)\bar v\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega Lu_0\bar v\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\|Lu_0\|_0\leqslant C\|u_0\|_{2,\Omega}\leqslant C'\|g\|_{3/2,\partial\Omega}.$$

由已证零边值情形的结果，

$$\begin{aligned}\|w\|_{2,\Omega}&\leqslant C(\|w\|_1+\|f\|_0+\|Lu_0\|_0)\leqslant C'(\|u\|_1+\|f\|_0\\&\quad+\|g\|_{3/2,\partial\Omega}).\end{aligned}$$

从而

$$\|u\|_{2,\Omega}\leqslant C(\|u\|_{1,\Omega}+\|f\|_{0,\Omega}+\|g\|_{3/2,\partial\Omega}).$$

由范数内插不等式，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$ 使

$$\|u\|_{1,\Omega}\leqslant\varepsilon\|u\|_{2,\Omega}+C(\varepsilon)\|u\|_0,$$

取 ε 满足 $C\varepsilon=\frac{1}{2}$，终得估计 (2.57)。 ▎

对于其它边值问题也可类似讨论解的正则性。

§7 二阶椭圆算子的特征函数

本节我们假定二阶椭圆算子

$$Lu=-D_j(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu$$

是形式自共轭的，即其形式自共轭算子

$$L^*u=-D_i(\bar{a}_{ij}D_ju)+D_i(\bar{b}_iu)+\bar{c}u$$

与 L 相等。这里 L 和 L^* 是 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 的有界线性算子。$L=L^*$ 相当于

$$a(u,v)=\overline{a(v,u)},\quad \forall\, u,v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.58}$$

易见(2.58)成立的充分必要条件是

$$\begin{aligned}&a_{ij}(x)=\overline{a_{ji}(x)},\\&b_i(x)=-\overline{b_i(x)},\\&\overline{c(x)}-c(x)=\overline{\frac{\partial b_i}{\partial x_i}}.\end{aligned} \tag{2.59}$$

我们对系数作下列假定

$$\begin{aligned}&a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\delta|\xi|^2,\ x\in\Omega,\xi\in \boldsymbol{R}^n,\\&a_{ij}\in C^0(\bar{\Omega}),\ b_i,c\in L^\infty(\Omega).\end{aligned} \tag{2.60}$$

由 Gårding 不等式，存在 $\lambda_0>0,\delta'>0$ 使

$$a(v,v)+\lambda_0\|v\|_0^2\geqslant\delta'\|v\|_1^2,\quad \forall\, v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.61}$$

在 $H_0^1(\Omega)$ 上引入内积

$$((u,v))_1=a(u,v)+\lambda_0(u,v), \tag{2.62}$$

由(2.58)这确实是一个 $H_0^1(\Omega)$ 上的内积，由 (2.61)，这个

内积相应的范数跟 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数等价。由 Riesz 表示定理，对任意 $f\in H^{-1}(\Omega)$，存在 $Gf\in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$((Gf,v))_1=(f,v). \tag{2.63}$$

对 $f,g\in H^{-1}(\Omega)$，引入内积

$$((f,g))_{-1}=((Gf,Gg))_1, \tag{2.64}$$

这样 $H^{-1}(\Omega)$ 关于这个内积也是一个 Hilbert 空间。由嵌入 $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ 的紧性，G 是 $H_0^1(\Omega)$ ($L^2(\Omega),H^{-1}(\Omega)$) 上的紧算子，由于对 $f,g\in H_0^1(\Omega)$，

$$((Gf,g))_1=(f,g),$$
$$((f,Gg))_1=\overline{((Gg,f))_1}=\overline{(g,f)}=(f,g),$$

故

$$((Gf,g))=((f,Gg))_1,\quad \forall f,g\in H_0^1(\Omega),$$

从而 G 在 $H_0^1(\Omega)$ 上是自共轭的。G 是 $H_0^1(\Omega)$ 上的正算子。实际上，对 $u\in H_0^1(\Omega),u\neq 0$，

$$((Gu,u))_1=(u,u)>0.$$

由自共轭紧算子的一般理论，存在正特值序列 $\bar{\lambda}_i\to 0$ ($i\to+\infty$) 和对应特征函数 U_i，$\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中完备且关于内积 $((\ ,\ ))_1$ 正交：

$$GU_i=\bar{\lambda}_iU_i,\quad ((U_i,U_j))=0,\quad i\neq j.$$

$\{U_i\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 和 $H^{-1}(\Omega)$ 中也正交：

$$(U_i,U_j)=((GU_i,U_j))_1=\bar{\lambda}_i((U_i,U_j))_1=0,\quad i\neq j,$$
$$((U_i,U_j))_{-1}=((GU_i,GU_j))_1=\bar{\lambda}_i\bar{\lambda}_j((U_i,U_j))_1=0,\quad i\neq j.$$

现在验证 U_i 也是算子 L 的特征函数。由 G 的定义，对任意 $v\in H_0^1(\Omega)$，

$$((GU_i,v))_1=a(GU_i,v)+\lambda_0(GU_i,v)=(U_i,v).$$

由 $GU_i=\bar{\lambda}_iU_i$ 和 L 的定义得

$$\bar{\lambda}_ia(U_i,v)+\lambda_0\bar{\lambda}_i(U_i,v)=(U_i,v),$$

$$(LU_i,v)=\left(\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_i}-\lambda_0\right)U_i,v\right),$$

$$LU_i=\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_i}-\lambda_0\right)U_i=\lambda_iU_i,\quad \lambda_i=\frac{1}{\bar{\lambda}_i}-\lambda_0.$$

今把 U_i 按 $L^2(\Omega)$范数规范化，即设

$$(U_i,U_j)=\delta_{ij},$$

则由前面的计算

$$((U_i,U_j))_1=\bar{\lambda}_i^{-1}=(\lambda_i+\lambda_0)^{-1},$$
$$((U_i,U_j))_{-1}=\bar{\lambda}_i=(\lambda_i+\lambda_0).$$

故 $\{U_i\},\{(\lambda_0+\lambda_0)^{-\frac{1}{2}}U_i\},\{(\lambda_0+\lambda_0)^{\frac{1}{2}}U_i\}$分别是 $L^2(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)$，$H^{-1}(\Omega)$中的标准正交基，再由 Parseval 等式，我们得到

定理2.16 设 $\Omega\subset R^n$ 是有界区域，二阶椭圆算子 L 的系数满足条件(2.59)和(2.60)，则存在函数列$\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$和数列$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$满足

$$LU_i=\lambda_iU_i,$$

$\{U_i\},\{(\lambda_i+\lambda_0)^{-1/2}U_i\}$和$\{(\lambda_i+\lambda_0)^{1/2}U_i\}$ 分别是 $L^2(\Omega)$，$H_0^1(\Omega)$(带内积((,))$_1$)和 $H^{-1}(\Omega)$(带内积((,))$_{-1}$)中的标准正交基，级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_iU_i$$

在 $L^2(\Omega)$，$H^1(\Omega)$和$H^{-1}(\Omega)$中收敛的充分必要条件分别是

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i+\lambda_0)|c_i|^2<\infty\text{和}\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i+\lambda_0)^{-1}|c_i|^2.$$

类似于在 $V=H_0^1(\Omega)$和 $H=L^2(\Omega)$上讨论特征函数展开

的上述结果，我们有一般的结果

定理2.17 设V和H是两个 Hilbert 空间，V 在H内稠密，单射 $Iu=u$从V到H内是紧的，V上的有界共轭双线性型$a(u,v)$满足共轭对称条件

$$a(u,v)=\overline{a(v,u)}$$

和强制条件

$$a(v,v)\geqslant \alpha\|v\|_V^2,\quad \forall v\in V,\quad \alpha>0 \text{ 是常数},$$

则如下定义的算子

$$D(A)=\{u\in V\,|\,a(u,v)\text{在}V\text{上关于范数}\|\quad\|_H\text{连续}\},$$

$$a(u,v)=(Au,v)_H,\quad u\in D(A),v\in V$$

有特征函数序列 E_i 满足

$$AE_i=\lambda_i E_i,\quad (E_i,E_j)=\delta_{ij},\quad \lambda_i \text{ 单调上升},\quad \lambda_i\to+\infty,$$

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$是V中的完备基。

我们首先给出几个一维情形特征函数的例子，这时的特征值问题称为 Sturm-Liouville 问题。

例1 设 $\Omega=(0,1)$，在 $H_0^1(\Omega)$上取共轭双线性型

$$a(u,v)=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x,$$

显然$a(u,v)=\overline{a(v,u)}$，相应微分算子为 $Lu=-\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2$，边条件为 $u(0)=u(1)=0$，经直接计算得特征值和特征函数

$$\lambda_m=(m\pi)^2,\quad E_m=\sqrt{2}\sin(m\pi x),\quad m=1,2,\cdots.$$

例2 $V=H^1(\Omega),\Omega=(0,1)$，双线性型和微分算子同例1，这时边条件为 $u'(0)=u'(1)=0$，相应特征值和特征函数为

$$\lambda_m=(m\pi)^2,E_0(x)=1,\quad E_m(x)=\sqrt{2}\cos(m\pi x),$$
$$m=1,2,\cdots.$$

例3 $\Omega=(0,2\pi)$, $a(u,v)=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$,

$$V=\{v\in H^1(\Omega)\,|\,v(0)=v(2\pi)\},$$

相应特征函数正是三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos mx,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin mx,\quad m=1,2,\cdots.$$

现转向讨论多维情形。

例4 $\Omega=(0,a)\times(0,b)$, $L=-\Delta=-(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$, 边条件为 $u=0$。用分离变量法解得特征值和相应特征函数为

$$\lambda_{nm}=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right),\quad v_{nm}=\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$n,m=1,2,\cdots.$$

边条件为 $\partial u/\partial n=0$ 时相应特征值和特征函数为

$$\lambda_{nm}=\pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right),\quad u_{nm}=\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right),$$

$$n,m=0,1,\cdots.$$

由三角函数系的完备性易得$\{u_{nm}\}$的完备性，从而我们写出的是全部特征函数。

例5 $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<R^2\}$, $L=-\Delta=-(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)$。我们要解特征方程 $(\Delta+\lambda)h=0$。变换为极坐标(r,θ)，并按变量 θ 的 Fourier 级数展开

$$h(r,\theta)=h_0(r)+\sum_{m=1}^{\infty}(h_m(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}+h_{-m}(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}),$$

在极坐标下，

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

把 $h(r,\theta)$ 代入极坐标下的方程并比较系数得

$$h_m''+\frac{1}{r}h_m'+\left(\lambda-\frac{m^2}{r^2}\right)h_m=0,\quad m=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{2.65}$$

为使 $h\in H_0^1(\Omega)$，需要求 $h_m(R)=0$。这是一个一维的特征值问题，特征值必为正数，令 $s=\sqrt{\lambda}\,r$，方程(2.65)变为 m 阶 Bessel 方程

$$h''+\frac{1}{s}h'+\left(1-\frac{m^2}{s^2}\right)h=0, \tag{2.66}$$

当 $m\geqslant0$ 时，它在 $s=0$ 正则的解是

$$J_m(s)=\left(\frac{s}{2}\right)^m\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{\Gamma(i+1)\Gamma(m+i+1)}\left(\frac{s}{2}\right)^{2i}.$$

当 $m<0$ 时，令 $J_m(s)=(-1)^{-m}J_{-m}(s)$，它显然是(2.66)的解。以 $Z_{mj}(j=1,2,\cdots)$ 表示 $J_m(s)$ 的正零点，Z_{mj} 互不相同，Δ 的特征值为

$$\lambda_{mj}=(Z_{mj}/R)^2,\quad m=0,1,\cdots,\ j=1,2,\cdots,$$

相应特征函数为 $J_m(Z_{mj}r/R)e^{im\theta}$。

习 题

1．$a(u,v)$ 是实 Hilbert 空间 H 上实值、有界、强制双线性型，K 是 H 中的闭凸集，证明任给 $f\in H'$，存在 $u\in K$ 使

$$a(u,v-u)\geqslant(f,v-u),\quad \forall v\in K.$$

2．证明 $H_\Delta^0(\Omega)$ 和 $H_\Delta^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间。

3. 证明 $C^\infty(\bar{\Omega})$在 $H^1_\Delta(\Omega)$中稠密，这里$\partial\Omega\in C^2$。

4. 写出 Poisson 方程的混合边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \Omega\text{内}; \\ u = g_1, \ \Gamma\text{上}, & \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g_2, \ \Gamma_2\text{上}, \ \partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \end{cases}$$

的变分形式。

5. 证明共轭双线性型

$$a(u,v) = \int_\Omega Du \cdot D\bar{v}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} c(x) u\bar{v}\,\mathrm{d}\Gamma \quad (c(x) \geqslant c_0 > 0)$$

在Ω上关于 $H^1(\Omega)$范数强制。

6. 证明共轭双线性型

$$a(u,v) = \int_\Omega Du \cdot D\bar{v}\,\mathrm{d}x$$

在空间

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) \,\middle|\, \int_{\partial\Omega} \gamma v\,\mathrm{d}\Gamma = 0 \right\}$$

上关于 $H^1(\Omega)$的范数强制。

7. 证明有本性上界的函数有本性上确界。

8. 证明：若 $f \in C^1(\boldsymbol{R}^1)$，$f' \in L^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，$u \in H^1(\Omega)$，则 $\gamma f(u) = f(\gamma u)$。

9. $\partial\Omega \in C^1$，$a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$，$b_i, c \in L^\infty(\Omega)$，$a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2$，$x \in \Omega$，$\xi \in \boldsymbol{R}^n$，$\alpha > 0$。证明存在 $\lambda > 0$，$\alpha' > 0$ 使对任意 $v \in H^1(\Omega)$有

$$a(v,v) + \lambda \|v\|_0^2 \geqslant \alpha' \|v\|_1^2.$$

10. L为散度型二阶一致强椭圆型算子，写出问题

$$Lu = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_L} = g$$

的变分形式，叙述并证明解的正则性定理。

11．对第三边值问题

$$Lu = f, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_L} + au = g$$

考虑变分形式和解的正则性定理。

12．设 $V = H^1(\Omega)$，$\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$，

$$a(u,v) = \int_\Omega D_1 u(D_1 \bar{v} + cD_2 \bar{v}) + D_2 u(D_2 \bar{v} - cD_1 \bar{v})\mathrm{d}x,$$

$$L(v) = (f,v) + (g,\gamma \circ v)_{L^2(\partial\Omega)}, \quad f \in L^2(\Omega).$$

试解问题

$$u \in V, \quad a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

设 $u \in H^2(\Omega)$，给出这一变分方程的逐点解释。

13．在 $H^m(\Omega)$ 上引进共轭双线性型

$$a(u,v) = \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) D^\beta \overline{v(x)}\mathrm{d}x, \Omega \in \boldsymbol{R}^n,$$

这里对重复 α 和 β 在范围 $|\alpha| \leqslant m, |\beta| \leqslant m$ 内求和，$\alpha, \beta \in \boldsymbol{Z}_+^n$。假设

$$\mathrm{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} \geqslant \delta \sum_{|\alpha| = m} \xi^{2\alpha}, \quad x \in \Omega, \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n,$$

$\delta > 0$ 为常数，$a_{\alpha\beta} \in C^0(\bar{\Omega})$，$|\alpha| = |\beta| = m$，$a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$。证明存在 $\delta' > 0$ 和 $\lambda > 0$ 使

$$\mathrm{Re}\, a(v,v) + \lambda \|v\|_0^2 \geqslant \delta' \|v\|_m^2, \quad \forall v \in H_0^m(\Omega).$$

14．建立$2m$阶椭圆型方程解的存在、唯一、正则性定理和特征展开定理。

15．$a(u,v) = (\triangle u, \triangle v)$，证明 $a(u,v)$ 在 $H_0^2(\Omega)$ 上强制，解问题

$$u \in H_0^2(\Omega), a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

其中 $f\in L^2(\Omega)$。并给出逐点解释。

16. $a(u,v)=\int_\Omega \triangle u\triangle v\mathrm{d}x$，对 $f\in L^2(\Omega)$ 解变分方程

$$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ a(u,v)=(f,v),$$
$$\forall v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

解释 u 所满足的边条件。

17. $\Omega\subset \boldsymbol{R}^2$，在弹性板理论中考察

$$a(u,v)=\sigma a_1(u,v)+(1-\sigma)a_2(u,v)+\int_\Omega a_0uv\mathrm{d}x,$$

其中 $\sigma\in(0,1)$ 是板的 Poisson 系数，

$$a_1(u,v)=\int_\Omega \triangle u\triangle v\mathrm{d}x,$$

$$a_2(u,v)=\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\Big)\mathrm{d}x,$$

$$a_0(x)\geqslant a_0>0.$$

证明对 $f\in L^2(\Omega)$，存在 $u\in H^2(\Omega)$ 满足

$$a(u,v)=(f,v),\quad \forall v\in H^2(\Omega).$$

若解光滑，证明解满足方程

$$\triangle^2 u+a_0u=f$$

和边条件

$$\begin{cases}\triangle u+(1-\sigma)\left[2\nu_1\nu_2-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}-\nu_2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\nu_1^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]=0,\\ \dfrac{\partial(\triangle u)}{\partial\nu}+(1-\sigma)\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left[\nu_1\nu_2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)\right.\\ \qquad\left.+(\nu_1^2-\nu_2^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right]=0,\end{cases}$$

其中 τ 为单位切向量，$\nu=(\nu_1,\nu_2)$为单位法向量。

18. 设有界区域 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 的边界 $\partial\Omega\in C^\infty$，$f\in H^m(\Omega)$，证明问题

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad -\triangle u=f$$

的解 $u\in H^{m+2}(\Omega)$。

19. 在上题中若 $f\in H^s(\Omega)$，$s\geqslant 0$，证明$u\in H^{s+2}(\Omega)$。

20. 解特征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\lambda u(x),0<x<1,u(0)=u'(1)=0.$$

21. 解特征值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\lambda u(x),0<x<1,u'(0)-hu(0)=0,$$

$$u'(1)+hu(1)=0,h>0.$$

22. 设§3例6中的系数

$a_{ij}^k\in C^1(\bar{\Omega}_k),k=1,2,i,j=1,\cdots,n,\ \Omega\in C^2,S\in C^2$，

证明

$$u_k\in H^2(\Omega_k),\quad k=1,2.$$

第三章　抛物型方程

讨论发展方程（抛物型和双曲型方程）的一个基本观点是把它们看作抽象函数的常微分方程。为此我们提供抽象函数微积分学的一个纲要，并着重研究了一类抽象函数空间$(W(0,T))$的函数的连续性，从而使常微分方程的初值有意义，并且使分部积分公式成立。

与 Lax-Milgram 定理相当，我们以 Lions 定理作为常微分方程弱解存在唯一性的基础。我们用半群方法和Laplace变换研究常微分方程的强解及解的正则性。这里椭圆形方程解的正则性起着关键的作用。半群方法是我们的主要方法，初读本书可以限于学习这一方法。

为深入讨论抛物型方程解的正则性与方程自由项、边值和初值的关系，我们需要深入研究各向异性的 Sobolev 空间，特别是这种空间的迹与迹的提升。初学者可以承认在适当条件下非齐次边值总可化为齐次边值，从而回避迹的问题。

§1　抽象函数

1.1　抽象函数微分学

设B是一个 Banach 空间，其范数以$\| \ \|$表示。

定义3.1　以区间$I\subset \boldsymbol{R}^1$为定义域、值域在$B$中的映射$f$称为抽象函数，记作$f$：$I\to B$。

例如，给定二元函数 $f(x,t)\in L^2((a,b)\times(0,T))$，由 Fubini 定理，对 a.e.$t\in(0,T)$，$f(\cdot,t)\in L^2(a,b)$，故 $f(\cdot,t)$是$(0,T)\to L^2(a,b)$的抽象函数。

定义3.2 设f: $I\to B$，若在 t_0 有

$$\|f(t)-f(t_0)\|\to 0\quad (t\to t_0),$$

则称 f 在 t_0 连续，若 f 在 I 的每一点皆连续，则称 f 在区间 I 上连续。

用数学分析中同样的方法可证闭区间$[a,b]$上的连续抽象函数 f 一致连续，即对任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当 $t_1,t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时，$\|f(t_1)-f(t_2)\|<\varepsilon$。由此立刻知道闭区间$[a,b]$上的连续抽象函数 f 必有界，即存在$M>0$，使对任意 $t\in[a,b]$有$\|f(t)\|\leqslant M$。

定义3.3 若在 $t\in I$，存在 $b\in B$ 使

$$\|(f(t+h)-f(t))/h-b\|\to 0\quad (h\to 0),$$

则称 f 在 t 可微，b 叫作 f 在 t 的导数，记作 $f'(t)$。若 f 在 I 上每点可微，则称 f 在 I 可微，从而得导函数 $f'(t)$。类似可以定义高阶导数 $f''(t),f'''(t),\cdots,f^{(n)}(t)$等等。

定义3.4 若在 $t_0\in I$，各阶导数 $f^{(k)}(t_0)$存在，$k=1,2,\cdots$，且在 t_0 的某邻域内有幂级数展开式

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t_0)(t-t_0)^k,$$

则称 f 在点 t_0 解析。

若 f 在 t_0 解析，上述级数在 t_0 的一个复邻域内也收敛。自然可以研究复变量的抽象函数。

定义3.5 若对任一$b'\in B'$，数值函数$(b',f(t))$在 $t_0\in I$ 连续、可微、解析，则称 f 在 t_0 弱连续、可微、解析。

若 f 在一点(强)连续、可微、解析，显然必弱连续、可

微、解析，反过来当然未必成立。

1.2 抽象函数的Bochner积分

定义3.6 设$\{A_i\}_{i=1}^m$是区间I的互不相交的有有限Lebesgue测度$|A_i|$的一组子集，$\{b_i\}_{i=1}^m$是B中一组点，由

$$f(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{A_i}(t)b_i$$

定义的$I\to B$的函数称为简单函数，这里χ_{A_i}表示集合A_i的特征函数，它在A_i上取值为1，在A_i外取值为零。

定义3.7 设f是$I\to B$ a.e.定义的抽象函数，若在I上存在简单函数列f_n使

$$\|f_n(t)-f(t)\|\to 0\ (n\to\infty),\text{a.e.}\, t\in I,$$

则称f在I强可测。若对每一$b'\in B'$，数值函数$b'(f(t))=(b',f(t))$可测，则称f弱可测。

请读者自己证明I上的连续函数必强可测，又强可测函数必弱可测。反之有

定理3.1(B.J.Pettis) 若B可分，f弱可测必强可测。

定义3.8 设$f(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{A_i}(t)b_i$是$I$到$B$的简单函数，则定义$f$在$I$上的Bochner积分为

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{m}b_i|A_i|.$$

定义3.9 设f是$I\to B$的抽象函数，若存在简单函数列f_n满足

$$\|f_n(t)-f(t)\|\to 0,\text{a.e.}\, t\in I,$$

$$\int_I\|f_n(t)-f(t)\|\mathrm{d}t\to 0\ (n\to\infty),$$

则称 f 在 I 上 Bochner 可积，且其 Bochner 积分

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t.$$

容易验证，定义中的 f 强可测，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t$ 存在，且不依赖于序列 f_n 的选取。

定理3.2(Bochner) 强可测函数 f Bochner 可积的充分必要条件是 $\|f(t)\|$ Lebesgue 可积。

定理3.1和3.2的证明，请参见 Yosida 的《泛函分析》V 的4、5.

推论3.1 若 f 在 I 上Bochner 可积，则

$$\left\|\int_I f(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\int_I\|f(t)\|\mathrm{d}t.$$

请读者自行证明。

推论3.2 设 T 是 Banach 空间 B_1 到 Banach 空间 B_2 的有界线性算子，f 是 $I\to B_1$ 的Bochner 可积函数，则 Tf 是 $I\to B_2$ 的 Bochner 可积函数，且

$$\int_I Tf(t)\mathrm{d}t=T\int_I f(t)\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

特别若 $b'\in B$，则

$$\int_I (b',f(t))\mathrm{d}t=\left(b',\int_I f(t)\mathrm{d}t\right). \tag{3.2}$$

证明 由于 f 是 $I\to B_1$ 的 Bochner 可积函数，存在简单函数列 f_n: $I\to B_1$，满足

$$\int_I\|f_n(t)-f(t)\|_{B_1}\mathrm{d}t\to 0\quad(n\to\infty). \tag{3.3}$$

以$\|T\|$记 $\|T\|_{\mathscr{L}(B_1,B_2)}$，则

$$\|Tf_n(t)-Tf(t)\|_{B_2}\leqslant\|T\|\|f_n(t)-f(t)\|_{B_1}. \tag{3.4}$$

由

$$\|f_n(t)-f(t)\|_{B_1}\to 0\ (n\to\infty),\ \text{a.e.}\ t\in I$$

得

$$\|Tf_n(t)-Tf(t)\|_{B_2}\to 0\ (n\to\infty),\ \text{a.e.}\ t\in I.$$

又 Tf_n 为 B_2 中的简单函数列，由(3.2)、(3.4)得

$$\int_I \|Tf_n-Tf\|_{B_2}\mathrm{d}t\to 0\ (n\to\infty).$$

故 Tf Bochner 可积且

$$\int_I Tf\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_I Tf_n\mathrm{d}t.$$

但对简单函数易见

$$\int_I Tf_n\mathrm{d}t=T\int_I f_n\mathrm{d}t,$$

令 $n\to\infty$ 取极限，考虑到 T 的连续性即得(3.1)。▌

定理3.3 设 $f^{(n)}(t)\in C([a,b];B)=[a,b]\to B$ 连续抽象函数全体，则有 Taylor 公式

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(t-a)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

证明 任取 $b'\in B'$，考虑数值函数

$$\varphi(t)=(b',f(t)).$$

易证 $\varphi\in C^{(n)}([a,b])$，且 $\varphi^{(k)}(t)=(b',f^{(k)}(t))$，$k=0,1,\cdots,n$，(见习题 4)。由带积分余项的数值函数的Taylor公式得

$$(b',f(b))=\varphi(b)=\varphi(a)+\varphi'(a)(b-a)+\cdots$$

$$+\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (t-a)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

$$=(b', f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (t-a)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t).$$

由 b' 的任意性，基于 Hahn-Banach 定理即得(3.5)式。 ▎

推论3.3 设 $f\in C^1([a,b];B)$，则有估计

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\max_{[a,b]}\|f'(t)\|(b-a).$$

定义3.10 设 $f: I\rightarrow B$强可测,$p\geqslant 1$,若$\|f(t)\|\in L^p(I)$,则称 $f\in L^p(I;B)$，并定义

$$\|f\|_{L^p(I;B)}=\left(\int_I\|f(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

若对任意 $I'\subset\subset I$有$f\in L^p(I';B)$,则记$f\in L^p_{loc}(I;B)$。

1.3 广义抽象函数

定义3.11 $C_0^\infty(I)\rightarrow B$ 的一个连续线性映射 f 称为一个 B 值广义函数。f 在 $\varphi\in C_0^\infty(I)$ 取的值记作 $f(\varphi)=(f,\varphi)$。B 值广义函数组成的空间记作 $\mathscr{D}'(I;B)$。

例 设 $f\in L^1_{loc}(I;B)$，映射

$$\varphi\rightarrow\int_I\varphi(t)f(t)\mathrm{d}t$$

定义一个 $C_0^\infty(I)\rightarrow B$ 的连续线性映射，从而是一个 B 值广义函数，仍记为 f。对可分 Banach 空间 B，若$f,g\in L^1_{loc}(I;B)$定义同一个 B 值广义函数，必有 $f(t)=g(t)$，a.e.于I。仍以

f 记这一 B 值广义函数，即

$$(f,\varphi)=\int_I \varphi(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

定义3.12 设 $f\in\mathscr{D}'(I;B)$，定义 f 的导数 f' 为广义函数

$$(f',\varphi)=-(f,\varphi'),\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(I).$$

设 $B\subset C$，$u\in L^2(I;B)$，$v\in L^2(I;C)$满足

$$\int_I u(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\int_I v(t)\varphi(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(I)$$

则记 $u'=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\in L^2(I;C)$。

1.4 $L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$的 Fourier 变换和空间 $H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$。

对 Hilbert 空间X，在 $L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$引入内积

$$(f,g)=\int_{\boldsymbol{R}^1}(f(t),g(t))\mathrm{d}t,$$

$L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$仍是 Hilbert 空间。在 $L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$上仿数值函数定义 Fourier 变换

$$\hat{f}(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\tau t}f(t)\mathrm{d}t,$$

它是 $L^2(\boldsymbol{R}_t^1;X)$到$L^2(\boldsymbol{R}_\tau^1,X)$的一个等距同构，即Parseval等式成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{f}\|_X^2\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\|f\|_X^2\mathrm{d}t,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{f},\hat{g})\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}(f,g)\mathrm{d}t.$$

并且反演公式成立

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\tau t}\hat{f}(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

定义3.13 设 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$，若 $|\tau|^s\hat{f}(\tau)\in L^2(\boldsymbol{R}^1;X)$，则称 $f\in H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$，并定义其范数

$$\|f\|_{H^s(\boldsymbol{R}^1;\,X)}=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|^2)^s\|\hat{f}(\tau)\|_X^2\mathrm{d}\tau\right)^{1/2}.$$

又定义 $H^s(a,b;X)$ 为 $H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$ 在 (a,b) 的限制。

$H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$ 是在 Hilbert 空间 X 中取值的一元抽象函数的分数次 Sobolev 空间。就其变元个数为 1 这一点来说，比第一章中的 n 元复值 Sobolev 空间还要简单，原来的证明基本有效，只要记住把复数乘积换成 X 中的内积，把复数的绝对值换为 X 中的范数。

定理3.4 设 $s\in(0,1)$，则

$$H^s(\boldsymbol{R}^1;X)=\left\{u\in L^2(\boldsymbol{R}^1;X)\,\middle|\,\int_0^{\infty}t^{-2s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\|u(x-t)-u(x)\|_X^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty\right\},$$

$$\|u\|_{H^s(\boldsymbol{R}^1;\,X)}^2\approx\|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;\,X)}^2+\int_0^{\infty}t^{-2s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\|u(x-t)-u(x)\|_X^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{3.6}$$

证明 由 Parseval 等式

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}t^{-2s-1}\int_{-\infty}^{\infty}\|u(x-t)-u(x)\|_X^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t &=\int_0^{\infty}t^{-2s-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{e}^{it\xi}-1|^2\|\hat{u}(\xi)\|_X^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}t\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\|\hat{u}(\xi)\|_X^2\int_0^{\infty}t^{-2s-1}|\mathrm{e}^{it\xi}-1|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

注意到 $0<s<1$ 时，积分

$$\int_0^{\infty}t^{-2s-1}|\mathrm{e}^{it}-1|^2\mathrm{d}t<\infty,$$

进行变量替换得

$$\int_0^\infty t^{-2s-1}|e^{it\xi}-1|^2 dt = |\xi|^{2s}\int_0^\infty t^{-2s-1}|e^{it}-1|^2 dt = C_s|\xi|^{2s}.$$

故有

$$\int_0^\infty t^{-2s-1}\int_{-\infty}^\infty \|u(x-t)-u(x)\|_X^2 dx dt$$
$$= C_s\int_{-\infty}^\infty |\xi|^{2s}\|\hat{u}(\xi)\|_X^2 d\xi.$$

又有

$$\int_{-\infty}^\infty \|u(t)\|_X^2 dt = \int_{-\infty}^\infty \|\hat{u}(\xi)\|_X^2 d\xi,$$

故(3.6)成立。▌

推论3.4 设 $s\in(0,1)$，$u\in H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$，且当 $t<0$ 时 $u(t)=0$，则

$$\int_0^\infty t^{-2s}\|u(t)\|_X^2 dt \leqslant C\|u\|_{H^s(\boldsymbol{R}^1;X)}^2. \tag{3.7}$$

证明 由(2.3)式

$$C\|u\|_{H^s(\boldsymbol{R};X)} \geqslant \int_0^\infty t^{-2s-1}\int_{-\infty}^\infty \|u(x-t)-u(x)\|_X^2 dx dt$$
$$\geqslant \int_0^\infty t^{-2s-1}\int_0^t \|u(x)\|_X^2 dx dt$$
$$= \int_0^\infty \|u(x)\|_X^2\int_x^\infty t^{-2s-1} dt dx$$
$$= \frac{1}{2s}\int_0^\infty x^{-2s}\|u(x)\|_X^2 dx. ▌$$

定理3.5 设 $s\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$，$u\in H^s(\boldsymbol{R}^1;X)$，则存在常数 $C=C(s)$ 使

$$\|u(t+h)-u(t)\| \leqslant C|h|^{s-1/2}\|u\|_{H^s(\boldsymbol{R}^1;X)}. \tag{3.8}$$

证明留给读者作为练习。

§2 $H^{r,s}(Q)$空间

2.1 $H^{r,s}(Q)$ 的定义和求导运算

在抛物型方程和双曲型方程的研究中，空间变量 x 在区域 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 中变化，时间变量 t 在区间 $(0,T)$ 中变化，区域 $Q=\Omega\times(0,T)$ 总是不规则的，即有棱 $\partial\Omega\times\{0\}$。方程中空间变量和时间变量的地位不均等，最高阶导数的阶数不同，或其前符号不同。这些情况迫使我们讨论各向异性的 Sobolev 空间 $H^{r,s}(Q)$，确定其中的函数在侧面

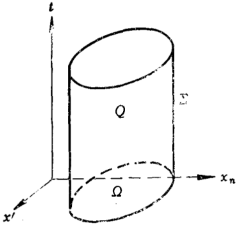


图 13

$\Sigma=\partial\Omega\times(0,T)$ 取的边值和在底面 $\{t=0\}$ 上取的初值所属的空间，此即所谓迹的问题；反过来确定边值和初值满足什么条件时，能够在 Q 上找到一个函数恰取给定的边值和初值，这就是迹的提升。当限于 L^2 理论时，Fourier 变换是一个有效的工具。

我们总假定 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中边界足够光滑的有界区域。

定义3.14 以 $\hat{v}=\hat{v}(\xi,\tau)$ 表示 $v=v(x,t)\in L^2(\boldsymbol{R}^n_x\times\boldsymbol{R}^1_t)$ 的 Fourier 变换，定义

$H^{r,s}(\boldsymbol{R}^n_x\times\boldsymbol{R}^1_t)=H^{r,s}=\{v\in L^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)\,|\,\hat{v}[(1+|\xi|^2)^{r/2}$

$$+(1+\tau^2)^{s/2}]\in L^2(\boldsymbol{R}_\xi^n\times\boldsymbol{R}_\tau^1)\}$$

$$\|u\|_{r,s,\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1}=\|u\|_{r,s}$$
$$=\|\hat{v}[(1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]\|_{L^2(\boldsymbol{R}_\xi^n\times\boldsymbol{R}_\tau^1)}.$$

显然当 r 和 s 为非负整数时，

$$H^{r,s}=\{v\in L^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)\,|\,D_x^\alpha v,D_t^\beta v\in L^2(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1),\ \alpha\in\boldsymbol{Z}_+^n,$$
$$|\alpha|\leqslant r,\beta\in\boldsymbol{Z}_+,0\leqslant\beta\leqslant s\}.$$

定义3.15 $H^{r,s}(\Omega\times(0,T))$ 是 $H^{r,s}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_t^1)$ 在 $Q=\Omega\times(0,T)$ 上的限制。

容易证明

$$H^{r,s}(\Omega\times(0,T))=L^2(0,T;H^r(\Omega))\cap H^s(0,T;L^2(\Omega)),$$

从而从 $H^r(\Omega)$ 和 $H^s(0,T;X)$ 内在范数的表达式，当 $r,s\in(0,1)$ 时

$$\|u\|^2_{H^{r,s}(\Omega\times(0,T))}=\|u\|^2_{r,s,\Omega\times(0,T)}=\|u\|^2_{r,s}$$
$$=\int_0^T\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|u(x,t)-u(y,t)|^2}{|x-y|^{n+2r}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_\Omega\frac{|u(t_1,x)-u(t_2,x)|^2}{|t_1-t_2|^{1+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

定理3.6 设 $u\in H^{r,s}(Q),r,s>0$，j 和 k 是非负整数，满足

$$1-\left(\frac{j}{r}+\frac{k}{s}\right)>0,$$

则当 $|\beta|=j$ 时

$$D_x^\beta D_t^k u\in H^{\mu,\nu}(Q),\ \ \frac{\mu}{r}+\frac{\nu}{s}=1-\left(\frac{j}{r}+\frac{k}{s}\right).$$

证明 只需考虑 $Q=\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_t^1$ 的情形。由于

$$|(D_x^\beta D_t^k u)^\wedge|=|\xi^\beta\tau^k\hat{u}|\leqslant|\xi|^j|\tau|^k|\hat{u}|,$$

又注意到 $\mu/r+j/r+k/s=1$，利用 Young 不等式得

$$|\xi|^j|\tau|^k(1+|\xi|^2)^{\mu/2}\leqslant\frac{j}{r}|\xi|^r+\frac{k}{s}|\tau|^s+\frac{\mu}{r}(1+|\xi|^2)^{r/2}$$
$$\leqslant C((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}).$$

类似地

$$|\xi|^j|\tau|^k(1+\tau^2)^{\nu/2}\leqslant C((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}).$$

再由 $H^{\mu,\nu}(\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_t^1)$ 范数的定义即得结论。 ▍

2.2 $H^{r,s}(Q)$ 的迹

定理3.7 设 $u\in H^{r,s}(Q)$，$r>\frac{1}{2}$，$s\geqslant 0$，则可定义 Σ 上的迹 $\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}$，$j<r-\frac{1}{2}$，（$\nu$ 为 $\partial\Omega$ 的外法向），且有

$$\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}\in H^{\mu_j,\nu_j}(\Sigma),\quad \frac{\mu_j}{r}=\frac{\nu_j}{s}=\frac{r-j-\frac{1}{2}}{r}$$

（若 $s=0$，则令 $\nu_j=0$）。

映射 $u\to\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}$ 从 $H^{r,s}(Q)$ 到 $H^{\mu_j,\nu_j}(\Sigma)$ 连续。又若 $s>\frac{1}{2}$，$r\geqslant 0$，则可定义迹 $D_t^k u(x,0)$，$k<s-\frac{1}{2}$，且有

$$D_t^k u(x,0)\in H^{p_k}(\Omega),\quad p_k=\frac{r}{s}\left(s-k-\frac{1}{2}\right),$$

映射 $u\to D_t^k u$ 从 $H^{r,s}(Q)$ 到 $H^{p_k}(\Omega)$ 连续。

证明 由定理3.6，只需考虑 $j=k=0$ 的情形。我们对边值情形进行证明，而把对初值的情形留作习题。和前面一样，可归结为 $Q=\boldsymbol{R}_x^n\times\boldsymbol{R}_t^1$ 这一典型情形。

设 $u\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)$，以 $\hat{u}$ 表示 u 的 Fourier 变换，而究

竟是对哪些变量取的，从变量记号一看便知。由反演公式和 Fubini 定理易知

$$\hat{u}(\xi',x_n,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}x_n\xi_n}\hat{u}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi_n,$$

$$\xi'=(\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|\hat{u}(\xi',x_n,\tau)|^2\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2$$

$$\times|\hat{u}(\xi,\tau)|^2\mathrm{d}\xi_n.$$

对第一个积分显然有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2}$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{(1+|\xi|^2)^r}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{(1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^r}$$

$$=(1+|\xi'|^2)^{1/2-r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{(1+\xi_n^2)^r}.$$

因 $r>\frac{1}{2}$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{(1+\xi_n^2)^r}<\infty,$$

故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\xi_n}{((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2}\leqslant C(1+|\xi'|^2)^{1/2-r}$$

$$=C(1+|\xi'|^2)^{-\mu}.$$

类似地，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_n}{((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi_n}{(\xi_n^r+(1+\tau^2)^{s/2})^2}$$

$$=C(1+\tau^2)^{\frac{s}{2r}-s}$$

$$=C(1+\tau^2)^{-\nu}.$$

合并以上两不等式得

$$\|u(\cdot,x_n,\cdot)\|^2_{\mu,\nu,R^{n-1}_{x'}\times R^1_t}$$

$$=\int_{R^{n-1}_{\xi'}\times R^1_\tau}((1+|\xi'|^2)^{\mu/2}+(1+\tau^2)^{\nu/2})^2$$

$$\times|\hat{u}(\xi',x_n,\tau)|^2 d\xi' d\tau$$

$$\leqslant 2\int_{R^{n-1}_{\xi'}\times R^1_\tau}((1+|\xi'|^2)^{\mu}+(1+\tau^2)^{\nu})$$

$$\times|\hat{u}(\xi',x_n,\tau)|^2 d\xi' d\tau$$

$$\leqslant C\int_{R^n_{\xi'}\times R^1_\tau}((1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2})^2$$

$$\times|\hat{u}(\xi,\tau)|^2 d\xi d\tau$$

$$=C\|u\|^2_{r,s,R^n_x\times R^1_t}.$$

特别对 $x_n=0$ 有

$$\|u(\cdot,0,\cdot)\|^2_{\mu,\nu,R^{n-1}_{x'}\times R^1_t}\leqslant C\|u\|^2_{r,s,R^n_x\times R^1_t}.\qquad(3.9)$$

对任意 $u\in H^{r,s}$，由逼近性质，存在 $u_m\in C_0^\infty(R^n_x\times R^1_t)$满足

$$\|u_m-u\|_{r,s}\to 0\quad(m\to\infty),$$

从而

$$\|u_m-u_{m'}\|\to 0\ \ (m,m'\to\infty).$$

由上述估计 (3.9) 得

$$\|u_m(\cdot,0,\cdot)-u_{m'}(\cdot,0,\cdot)\|_{\mu,\nu}\leqslant C\|u_m-u_{m'}\|_{r,s}\to 0,$$

$$m,m'\to\infty.$$

由 $H^{\mu,\nu}$ 的完备性，存在$u(\cdot,0,\cdot)$满足

$$\|u(\cdot,0,\cdot)-u_m(\cdot,0,\cdot)\|_{\mu,\nu}\to 0\quad(m\to\infty).$$

又由

$$\|u_m(\cdot,0,\cdot)\|_{\mu,\nu}\leqslant C\|u_m\|_{r,s},$$

令 $m\to\infty$取极限得(3.9)对任意 $u\in H^{r,s}$ 成立。▌

2.3 局部相容条件

上面我们研究了纯迹，即分别在变量 x 和 t 的边界 $\Sigma=\partial\Omega\times(0,T)$和$\Omega\times\{0\}$上的迹，只要 $H^{\mu,\nu}$ 和 H^{μ} 的次数合适，可继续分别对变量 t 和 x 求迹——混合迹，在两种边界的交界处$\partial\Omega\times\{0\}$，只是次序不同的混合迹自然应该相等。

定理3.8 设$r,s>0$，$1-2^{-1}(r^{-1}+s^{-1})>0$，非负整数$j$，$k$满足

$$\frac{j}{r}+\frac{k}{s}<1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right),\tag{3.10}$$

则有等式

$$D_t^k\frac{\partial^j u}{\partial\nu^j}(x,0)=\frac{\partial^j}{\partial\nu^j}D_t^k(x,0),\quad x\in\partial\Omega.\tag{3.11}$$

证明 由于一开始就假定了 $\partial\Omega$ 光滑，利用平直化和局部化可设 $\Omega=\boldsymbol{R}_+^n$，这时要证的是

$$D_t^k\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}(x',0,0)=D_{x_n}^jD_t^ku(x',0,0).\tag{3.12}$$

由定理3.7，

$$D_{x_n}^j(x',0,t)\in H^{\mu_j,\nu_j}(\boldsymbol{R}_x^{n-1}\times\boldsymbol{R}_t^1),$$

$$\frac{\mu_j}{r}=\frac{\nu_j}{s}=\frac{r-j-\dfrac{1}{2}}{r}.$$

再由同一定理关于在 $t=0$ 上迹的部分，

$$D_t^k D_{x_n}^j(x',0,0)\in H^{p_{jk}}(R_x^{n-1}),\ p_{jk}=\frac{\mu_j}{\nu_j}\left(\nu_j-k-\frac{1}{2}\right).$$

再考虑另一次序的混合迹。

$$D_t^k u(x,0)\in H^{p_k}(R_+^n),\quad p_k=\frac{r}{s}\left(s-k-\frac{1}{2}\right),$$

$$D_{x_n}^j D_t^k u(x',0,0)\in H^{p_{kj}}(R_+^n),\quad p_{kj}=p_k-j-\frac{1}{2}.$$

直接计算得 $p_{kj}=p_{jk}$，即不同次序的混合迹属于同一空间，且相应迹算子连续，对光滑函数(3.12)显然成立，由逼近推理对一般函数它也成立。 ▌

2.4 整体相容条件

在局部相容条件中，j 和 k 的最大可能范围是要满足不等式(3.10)，这时(3.11)两端的迹都有意义并且相等。当(3.10)成为等式时，局部相容条件失去意义，因为相应的迹一般不存在。例如 $j=k=0$ 时，$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=2$，$u(x,0)\in H^p(R_+^n)$，$p=\frac{r}{s}\left(s-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，恰好不能再求迹。同样 $u(x',0,t)\in H^{\mu,\nu}(R^{n-1}\times R^1)$，$\nu=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{r}{2s}$，也刚好是临界情形。

我们对定义在第一象限 $R_+^2=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 取值在 Hilbert 空间 X 的函数考虑这种基本临界情形。$H^{r,s}(R_+^2;X)$ 的定义与 $H^{r,s}(R_+^2)$ 类似。

定理3.9 设 $u\in H^{r,s}(R_+^2;X)$，$r,s>0$ 满足等式

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=2, \tag{3.13}$$

则可定义

$$\begin{cases}u(x,0)=f(x)\in H^{1/2}(\boldsymbol{R}_+^1;X);\\ u(0,t)=g(t)\in H^{1/2}(\boldsymbol{R}_+^1;X).\end{cases} \tag{3.14}$$

且有整体相容关系

$$\int_0^\infty \sigma^{-1}\|f(\sigma^s)-g(\sigma^r)\|_X^2\mathrm{d}\sigma\leqslant C\|u\|_{H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^2;X)}. \tag{3.15}$$

证明 (3.14)由定理3.7推出，只是那里的函数要推广到X值抽象函数，证明保持有效。由于r,s地位相同，不妨设$s\leqslant 1,r\geqslant 1$，并设$u\in C^\infty(\overline{\boldsymbol{R}_+^2};X)\cap H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^2;X)$。为应用Taylor展开和推论3.4，我们改造$u$为$v$，使$v$跟$u$有相同的边值$u(0,t)=v(0,t)$，并且$v$在$x=0$的1至$[r]$阶导数为零，为此令

$$v(x,t)=\sum_{k=1}^{[r]+1}a_k u(kx,t),$$

其中a_k满足

$$\sum_{k=1}^{[r]+1}a_k k^i=\begin{cases}0, & i=1,\cdots,[r];\\ 1, & i=0.\end{cases}$$

我们有

$$\int_0^\infty\|u(\sigma^s,0)-u(0,\sigma^r)\|_X^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}$$

$$\leqslant C\Big(\int_0^\infty\|u(\sigma^s,0)-v(\sigma^s,0)\|^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}$$

$$+\int_0^\infty\|v(\sigma^s,0)-v(\sigma^s,\sigma^r)\|_X^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}$$

$$+\int_0^\infty \|v(\sigma^s,\sigma^r)-v(0,\sigma^r)\|_X^2\frac{d\sigma}{\sigma}\Big)$$

$$=C(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}).$$

由于 $u(\sigma^s,0)-v(\sigma^s,0)$ 当 $\sigma=0$ 时取值为零，$u(\cdot,0)-v(\cdot,0)\in H^{1/2}(\mathbf{R}_+^1;X)$，由推论3.4得

$$\mathrm{I}=\frac{1}{s}\int_0^\infty \|u(\sigma,0)-v(\sigma,0)\|_X^2\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\leqslant C\|(u-v)(\cdot,0)\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}_+^1;X)}\leqslant C\|u\|^2_{H^{r,s}(\mathbf{R}_+^2;X)}.$$

由定理3.5提供的嵌入定理，注意这里$\frac{1}{2}<s\leqslant 1$，我们有

$$\|v(\sigma^s,0)-v(\sigma^s,\sigma^r)\|_X\leqslant C(\sigma^r)^{s-1/2}\|v(\sigma^s,\cdot)\|_{H^s(\mathbf{R}_+^1;X)}.$$

从而

$$\mathrm{II}=\int_0^\infty\|v(\sigma^s,0)-v(\sigma^s,\sigma^r)\|_X^2\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \sigma^{2r(s-1/2)}\|v(\sigma^s,\cdot)\|_X^2\frac{d\sigma}{\sigma}$$

$$=C'\int_0^\infty \sigma^{2r/s(s-1/2)-1}\|v(\sigma,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbf{R}_+^1;X)}d\sigma$$

$$=C'\int_0^\infty\|v(\sigma,\cdot)\|^2_{H^s(\mathbf{R}_+^1;X)}d\sigma$$

$$\leqslant C'\|u\|^2_{H^s(\mathbf{R}_+^1;X)}.$$

由带积分余项的 Taylor 公式，注意到 v 在 $x=0$ 的 $1-[r]$阶导数为零，我们有

$$v(x,t)-v(0,t)=\frac{x^{[r]-1}}{([r]-1)!}\int_0^x D_y^{[r]}v(y,t)dy,$$

$$\|v(x,t)-v(0,t)\|_X \leqslant Cx^{[r]-1}\int_0^x \|D_y^{[r]}v(y,t)\|_X \mathrm{d}y. \tag{3.16}$$

由于 $D_y^{[r]}v(0,t)=0$，由推论3.4，

$$\int_0^\infty x^{-2(r-[r])}\|D_x^{[r]}v(x,t)\|_X^2 \mathrm{d}x \leqslant C\|D_x^{[r]}v(\cdot,t)\|^2_{H^{r-[r]}(\mathbf{R}_+^1;\ X)},$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-2(r-[r])}\|D_x^{[r]}v(x,t)\|_X^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leqslant C\int_0^\infty \|D_x^{[r]}v(\cdot,t)\|^2_{H^{r-[r]}(\mathbf{R}_+^1;\ X)}\mathrm{d}t \\
&\leqslant C\int_0^\infty \|v(\cdot,t)\|^2_{H^r(\mathbf{R}_+^1;\ X)}\mathrm{d}t \\
&\leqslant C\|v\|^2_{H^{r,s}(\mathbf{R}_+^2;\ X)}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

于是由(3.16)

$$\begin{aligned}
\text{Ⅲ} &= \int_0^\infty \|v(\sigma^s,\sigma^r)-v(0,\sigma^r)\|_X^2 \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&\leqslant C\int_0^\infty \sigma^{2s([r]-1)}\left(\int_0^{\sigma^s}\|D_x^{[r]}v(x,\sigma^r)\|_X\mathrm{d}x\right)^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&= C\int_0^\infty \sigma^{2s/r([r]-1)}\left(\int_0^{\sigma}\|D_x^{[r]}v(x,\sigma)\|_X\mathrm{d}x\right)^2\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma},
\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\begin{aligned}
\text{Ⅲ} &\leqslant C\int_0^\infty \sigma^{2\frac{s}{r}([r]-1)}\int_0^{\sigma^{s/r}} x^{-2(r-[r])}\|D_x^{[r]}v(x,\sigma)\|_X^2\mathrm{d}x \\
&\quad\times\int_0^{\sigma^{s/r}} x^{2(r-[r])}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} \\
&= C\int_0^\infty\int_0^{\sigma^{s/r}} x^{-2(r-[r])}\|D_x^{[r]}v(x,\sigma)\|_X^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

由(3.17)得

$$\text{III}\leqslant C\|u\|^2_{H^{r,s}(\mathbf{R}^2_+;\ X)}. \quad \blacksquare$$

现转向考察一般阶数的局部和整体相容条件，仍限于典型区域 $\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^1_+$。

定理3.10 设 $u\in H^{r,s}(\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^1_+)$，$r,s>0$ 满足

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)>0,$$

$$D_t^k u(x,0)=f_k(x),\quad 0\leqslant k<s-\frac{1}{2},$$

$$D_{x_n}^j u(x',0,t)=g_j(x',t),\quad 0\leqslant j<r-\frac{1}{2},$$

则对 $p_k=\frac{r}{s}\left(s-k-\frac{1}{2}\right)$，$\frac{\mu_j}{r}=\frac{\nu_j}{s}=\frac{r-j-\frac{1}{2}}{r}$ 有

$$f_k\in H^{p_k}(\mathbf{R}^n_+),\ g_j\in H^{\mu_j,\nu_j}(\mathbf{R}^{n-1}_x\times\mathbf{R}^1_+).$$

并且当 $\frac{j}{r}+\frac{k}{s}=\frac{r-j-\frac{1}{2}}{r}$ 时，

$$D_t^k g_j(x',0)=D_{x_n}^j f_k(x',0). \tag{3.18}$$

当 $\frac{j}{r}+\frac{k}{s}=\frac{r-j-1/2}{r}$ 时，

$$\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^{n-1}}|D_{x_n}^j f_k(x',\sigma^s)-D_t^k g_j(x',\sigma^r)|^2\mathrm{d}x'\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}$$
$$\leqslant C\|u\|_{H^{r,s}(\mathbf{R}^n_+\times\mathbf{R}^1_+)}. \tag{3.19}$$

证明 由定理3.8知，只需验证(3.19)。由定理3.7得

$$D_{x_n}^j D_t^k u \in H^{\mu,\nu}(\boldsymbol{R}_+^n \times \boldsymbol{R}_+^1),$$

其中 μ,ν 满足

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\nu}{s} = 1 - \left(\frac{j}{r} + \frac{k}{s}\right).$$

当 j,k 满足

$$\frac{j}{r} + \frac{k}{s} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$$

时，直接计算得

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = 2.$$

对 $D_{x_n}^j D_t^k u(\cdot, x_n, t) \in H^{\mu,\nu}(\boldsymbol{R}_+^2; L^2(\boldsymbol{R}_x^{n-1}))$应用定理 3.9，立即得估计(3.19)。 ▎

引入空间

$$F_0 = \left\{ (f_k, g_j) \in \prod_{k<s-\frac{1}{2}} H^{\gamma_k}(\boldsymbol{R}_+^n) \times \prod_{j<r-\frac{1}{2}} H^{\mu_j,\nu_j}(\boldsymbol{R}^{n-1} \times \boldsymbol{R}_+^1) \mid (f_k, g_j) \text{满足(3.18)、(3.19)} \right\}.$$

定理3.11 定理3.10中定义的映射

$$u \to \{f_k, g_j\}_{k<s-1/2,\ j<r-1/2}$$

是$H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^n \times \boldsymbol{R}_+^1) \to F_0$上的满射，即对每一$(f_k, g_j) \in F_0$，存在

$$u = R(f_k, g_j) \in H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^n \times \boldsymbol{R}_+^1),$$

使

$$D_t^k u(x, 0) = f_k(x), \quad 0 \leqslant k < s - \frac{1}{2},$$

$$D_{x_n}^j u(x', 0, t) = g_j(x', t), \quad 0 \leqslant j < r - \frac{1}{2},$$

并且

$$\|u\|^2_{H^{r,s}(R^n_+\times R^1_+)}$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{k<s-\frac{1}{2}}\|f_k\|^2_{H^{p_k}(R^n_+)}+\sum_{j<r-\frac{1}{2}}\|g_j\|^2_{H^{\mu_j,\nu_j}(R^{n-1}\times R^1_+)}$$

$$+\sum_{\frac{j}{r}+\frac{k}{s}=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{r}+\frac{1}{s})}\int_0^\infty\int_{R^{n-1}}|D^j f_k(x',\sigma^s)$$

$$-D^k g_j(x',\sigma^r)|^2 dx'\frac{d\sigma}{\sigma}\Big).$$

我们通过以下几个引理来证明这个定理。

引理3.1 设整数 j 满足 $0\leqslant j<r-\dfrac{1}{2}$，$\mu_j,\nu_j$ 由下式定义

$$\frac{\mu_j}{r}+\frac{\nu_j}{s}=\frac{r-j-\frac{1}{2}}{r}.$$

$g_j\in H^{\mu_j,\nu_j}(R^{n-1}_x\times R^1_t)$，则存在 $v\in H^{r,s}(R^n\times R^1)$ 使

$$D^j_{x_n}v(x',0,t)=g_j(x',t), \tag{3.20}$$

$$\|v\|_{r,s,R^n\times R^1}\leqslant C\|g_j\|_{\mu_j,\nu_j,R^{n-1}\times R^1}. \tag{3.21}$$

证明 以 $\hat{g}_j(\xi',\tau)$ 表示 g_j 对 (x',t) 的 Fourier 变换，由定义

$$((1+|\xi'|^2)^{\mu_j/2}+(1+\tau^2)^{\nu_j/2})\hat{g}_j(\xi',\tau)\in L^2(R^{n-1}_\xi\times R^1_\tau).$$

设 $\varphi\in C_0^\infty(R^1)$，$\varphi^{(j)}(0)=1$，作函数

$$v(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{i(x'\xi'+t\tau)}\big[(1+|\xi'|^2)+(1+\tau^2)^{s/r}\big]^{-j/2}$$

$$\times\hat{g}_j(\xi',\tau)\varphi(((1+|\xi'|^2)+(1+\tau^2)^{s/r})^{1/2}x_n)d\xi'd\tau, \tag{3.28}$$

在积分号下对 x_n 求 j 次微商，由反演公式得(3.20)。

现在证明 $v\in H^{r,s}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)$，$v$ 关于 x,t 的Fourier变换

$$\hat{v}(\xi,\tau)=[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j/2-1/2}\hat{g}(\xi',\tau)\phi$$
$$\times((1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{-1/2}\xi_n),$$
$$[(1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]^2|\hat{v}(\xi,\tau)|^2$$
$$\leqslant C[(1+|\xi'|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]^2|\hat{g}(\xi',\tau)|^2$$
$$\times|\phi((1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{-1/2}\xi_n)|^2$$
$$\times[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j-1}$$
$$+C|\xi_n|^{2r}[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j-1}$$
$$\times|g(\xi',\tau)|^2|\phi((1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{-1/2}\xi_n|^2,$$

v 在 $H^{r,s}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)$中的范数

$$\|v\|_{r,s,\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1}=\int[(1+|\xi|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]^2|\hat{v}(\xi,\tau)|^2d\xi d\tau$$
$$\leqslant C\Big[\int[(1+|\xi'|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]^2$$
$$\times[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j=1}|\hat{g}(\xi',\tau)|^2$$
$$\times|\phi((1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{-1/2}\xi_n)|^2d\xi d\tau$$
$$+\int|\xi_n|^{2r}[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j-1}$$
$$\times|\hat{g}(\xi',\tau)|^2|\phi((1+|\xi'|^2$$
$$+(1+\tau^2)^{s/r})^{-1/2}\xi_n)|^2d\xi d\tau\Big]$$
$$=C(\mathrm{I}+\mathrm{II}).$$

现分别估计 I，II 两项。先对 ξ_n 积分得

$$\mathrm{I}\leqslant\int[(1+|\xi'|^2)^{r/2}+(1+\tau^2)^{s/2}]^2[1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]$$

$$\times\int |\varphi(\xi)|^2 d\xi |\hat{g}(\xi',\tau)|^2 d\xi' d\tau$$

$$\leqslant C\int (1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{r-j-1/2}|\hat{g}(\xi',\tau)|^2 d\xi' d\tau$$

$$\leqslant C\|g\|_{\mu_j,\nu_j,R_{x'}^{n-1}\times R_t^1}.$$

同样有

$$\mathrm{II}\leqslant\int [1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r}]^{-j-1}|\hat{g}(\xi',\tau)|^2$$

$$\times(1+|\xi'|^2+(1+\tau^2)^{s/r})^{r+1/2}\int \zeta^{2r}|\varphi(\zeta)|^2 d\zeta d\xi' d\tau$$

$$\leqslant C\|g\|_{\mu_j,\nu_j,R_{x'}^{n-1}\times R_t^1}. \quad \blacksquare$$

引理3.2 设 l 为区间$\left[0,r-\frac{1}{2}\right]$中的最大整数，

$$(g_j)_{j=0}^l\in\prod_{j=0}^l H^{\mu_j,\nu_j}(R^{n-1}\times R^1),$$

则存在 $v\in H^{r,s}(R^n\times R^1)$满足

$$D_{x_n}^j v(x',0,t)=g_j(x',t),\ j=0,1,\cdots,l,$$

$$\|v\|_{r,s,R^n\times R^1}\leqslant C\sum_{j=0}^l\|g_j\|_{\mu_j,\nu_j,R^{n-1}\times R^1}.$$

证明 由引理3.1，对每一 $g_j\in H^{\mu_j,\nu_j}(R^{n-1}\times R^1)$ 存在 $v_j\in H^{r,s}(R^n\times R^1)$ 满足 $D_{x_n}^j v_j=g_j$，做函数

$$\tilde{v}_j=\sum_{k=1}^{l+1}a_k v_j(x',kx_n,t),$$

其中系数 a_k 满足

$$\sum_{k=1}^{l+1} a_k k^i = \delta_{ij}, \quad i=0,1,\cdots,l.$$

显然 $v = \sum_{j=0}^{l} \tilde{v}_j$ 满足引理的要求。 ▌

引理3.3 设 $\varphi_k \in H^{p_k}(R_+^n)$ 满足

$$D_{x_n}^j \varphi_k(x',0)=0, \quad j<p_k-\frac{1}{2}, \quad p_k=\frac{r}{s}\left(s-k-\frac{1}{2}\right), \tag{3.23}$$

$$\int_0^\infty \int_{R^{n-1}} |D_{x_n}^j \varphi_k(x',\sigma)|^2 \frac{d\sigma}{\sigma}<\infty, \quad j=p_k-\frac{1}{2}=\text{整数},$$

则存在 $\omega_k \in H^{r,s}(R_+^n \times R_+^1)$ 满足

$$\begin{cases} D_{x_n}^j \omega_k(x',0,t)=0, & j<r-\dfrac{1}{2}, \\ D_t^k \omega_k(x,0)=\varphi_k, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$\|\omega_k\|^2_{H^{r,s}(R_+^n \times R_+^1)}$$

$$\leqslant C\left(\|\varphi_k\|^2_{H^{p_k}(R_+^n)}+\int_0^\infty \int_{R^{n-1}} \left|D_{x_n}^{p_k-\frac{1}{2}} \varphi_k(x',\sigma)\right|^2 dx' \frac{d\sigma}{\sigma}\right). \tag{3.25}$$

当 $p_k-\frac{1}{2}$ 不是整数时，积分项不出现。

证明 由条件（3.23）可知（见下面的引理3.4）$\varphi_k \in H_0^{p_k}(R_+^n)$，从而令 φ_k 当 $x_n<0$ 时为零所得的函数 $\varphi_k \in H^{p_k}(R^n)$，以 $\phi_k(\xi)$ 记 φ_k 的Fourier 变换，作函数

$$v(x,t)=(2\pi)^{-n/2}\int e^{ix\cdot\xi}\,\phi_k(\xi)(1+|\xi|^2)^{-kr/2s}$$

$$\times \rho((1+|\xi|^2)^{r/2s}t)\mathrm{d}\xi, \tag{3.26}$$

其中 $\rho\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，$\rho^{(k)}(0)=1$。由Fourier 反演公式

$$D_t^k v(x,0)=(2\pi)^{-n/2}\int \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}_k(\xi)\mathrm{d}\xi=\varphi_k(x).$$

v 关于 x,t 的Fourier变换为

$$\hat{v}(\xi,\tau)=C(1+|\xi|^2)^{-\frac{kr}{2s}-\frac{r}{2s}}\hat{\rho}((1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2s}}\tau)\hat{\varphi}_k(\xi),$$

其中 $\hat{\rho}$ 为 ρ 关于变量 t 的 Fourier变换，我们利用了 Fourier 变换的简单性质

$$\widehat{\rho(ct)}(\tau)=c^{-1}\hat{\rho}(c^{-1}\tau).$$

我们来计算 v 在 $H^{r,s}$ 中的范数。

$$\int((1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}}+(1+|\tau|^2)^{\frac{s}{2}})^2|\hat{v}(\xi,\tau)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C\int((1+|\xi|^2)^r+|\tau|^{2s})|\hat{v}(\xi,\tau)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant C\int(1+|\xi|^2)^{r-\frac{kr}{s}-\frac{r}{s}}|\hat{\rho}((1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2s}}\tau)|^2$$

$$\times|\varphi_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau+C\int(1+|\xi|^2)^{-\frac{kr}{s}-\frac{r}{s}}|\tau|^{2s}$$

$$\times|\hat{\rho}((1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2s}}\tau)|^2|\varphi_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$=C(\text{I}+\text{II}).$$

$$\text{I}=\int(1+|\xi|^2)^{r-\frac{kr}{s}-\frac{r}{s}}|\varphi_k(\xi)|^2\int\hat{\rho}((1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2s}}\tau)\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi$$

$$=\int(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{s}(s-k-\frac{1}{2})}|\varphi_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi$$

$$\times\int|\hat{\rho}(\tau)|^2\mathrm{d}\tau = C\|\varphi_k\|^2_{H^{p_k}(R^n)}.$$

$$\mathrm{II} = \int(1+|\xi|^2)^{-\frac{kr}{s}-\frac{r}{s}}|\varphi_k(\xi)|^2$$

$$\times\int|\tau|^{2s}|\hat{\rho}((1+|\xi|^2)^{-\frac{r}{2s}}\tau)|^2\mathrm{d}\tau$$

$$=\int(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{s}(s-k-\frac{1}{2})}|\varphi_k(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\int|\tau|^{2s}|\rho(\tau)|^2\mathrm{d}\tau$$

$$= C\|\varphi_k\|^2_{H^{p_k}(R^n)}.$$

又由下面的引理3.4,

$$\|\varphi_k\|_{H^{p_k}(R^n)}$$

$$\leqslant C\left(\|\varphi_k\|_{H^{p_k}(R^n_+)}+\int_0^\infty\int_{R^{n-1}}|D^{p_k-\frac{1}{2}}\varphi_k(x',\sigma)|^2\mathrm{d}x'\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma}\right)$$

(当 $p_k-\frac{1}{2}$ 不是整数时积分项不出现), 故对 v 估计(3.25)成立. ▎

令

$$\omega_k(x,t) = v(x,t) - \sum_{m=1}^{[r]+1} a_m v(x',-mx_n,t),$$

这里 a_m 是下列方程组的解

$$\sum_{m=1}^{[r]+1} a_m(-m)^i = 1,\quad i = 0,1,\cdots,[r].$$

ω_k 显然满足

$$D^j_{x_n}\omega_k(x',0,t) = 0,\quad 0\leqslant j < r-\frac{1}{2}.$$

又由于当 $x_n<0$ 时，$\varphi_k(x)=0$，故

$$D_t^k\omega_k(x,0)=D_t^kv(x,0)-\sum_{m=1}^{[r]+1}a_mD_t^kv(x',-mx_n,0)$$

$$=D_t^kv(x,0)-\sum_{m=1}^{[r]+1}a_m\varphi_k(x',-mx_n)$$

$$=\varphi_k(x).$$

引理3.4 设 $u\in H^s(R_+^1;X)$，X 为 Hilbert 空间，$s\geqslant\frac{1}{2}$，$\tilde{u}$ 为 u 的当 $t<0$ 时取零值的延拓，则 $\tilde{u}\in H^s(R^1;X)$ 的充分必要条件是

$$u^{(j)}(0)=0,\quad 0\leqslant j<r-\frac{1}{2},\tag{3.27}$$

$$\int_0^\infty\|u^{(s-\frac{1}{2})}(t)\|_X^2\frac{dt}{t}<\infty.\tag{3.28}$$

且

$$\|\tilde{u}\|_{H^s(R^1;X)}\leqslant C\left(\|u\|_{H^s(R_+^1;X)}+\int_0^\infty\|u^{(s-\frac{1}{2})}(t)\|_X^2\frac{dt}{t}\right).\tag{3.29}$$

（当 $s-\frac{1}{2}$ 不是整数时，积分不出现）。

证明 由定理3.5，并注意到 $u\in H^s(R_+^1;X)$ 时，$u^{(j)}(t)\in H^{s-j}(R_+^1;X)$，我们知 $0\leqslant j<r-\frac{1}{2}$ 时 $u^{(j)}\in C^0(\overline{R_+^1};X)$，从而 $u^{(j)}(0)$ 有意义。和定理1.34与第一章习题14类似地可证：当对某一非负整数 m，有 $m+\frac{1}{2}<s\leqslant m+1$ 时，

$\tilde{u}\in H^{s}(R^1;X)$的充分必要条件是

$$u^{(j)}(0)=0,\quad j=0,1,\cdots,m.$$

而当 $s=m+\dfrac{1}{2}$时，$v=u^{(j)}\in H^{1/2}(R_+^1;X)$，由延拓定理和定理 3.4 知

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\|v(t+\tau)-v(t)\|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau}{\tau^2}\leqslant C\|v\|^2_{H^{1/2}(R_+^1;X)}.$$

今设积分条件

$$\int_0^\infty\|v(t)\|^2\frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty$$

满足，则有

$$\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\frac{\|\tilde{v}(t+\tau)-\tilde{v}(t)\|^2}{\tau^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\|v(t+\tau)-v(t)\|^2}{\tau^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$+\int_{-\infty}^0\int_{-t}^\infty\frac{\|v(t+\tau)\|^2}{\tau^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t+\int_0^\infty\int_{-\infty}^{-t}\frac{\|v(t)\|^2}{\tau^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^\infty\int_{-t}^0\frac{\|v(t+\tau)-v(t)\|^2}{\tau^2}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.$$

显然

$$\mathrm{I}+\mathrm{IV}\leqslant C\|v\|^2_{H^{1/2}(R_+^1;X)}.$$

$$\mathrm{II}=\int_{-\infty}^0\int_0^\infty\frac{\|v(\tau')\|^2}{(\tau'-t)^2}\mathrm{d}\tau'\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}t}{(t-\tau')^2}\|v(\tau')\|^2\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^\infty \frac{\|v(\tau')\|^2}{\tau'} d\tau'.$$

$$\text{III} = \int_0^\infty \frac{\|v(t)\|^2}{t} dt.$$

充分性证毕。又由推论3.4知 $s = m + \frac{1}{2}$ 时，关于积分的条件(3.28)成立。 ∎

定理3.11的证明 只需证明满射性。由引理3.2，对于 $(f_k, g_j) \in F_0$，存在 $v \in H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^n \times \boldsymbol{R}_+^1)$ 满足

$$\frac{\partial^j v}{\partial x_n^j}(x', 0, t) = g_j(x', t), \quad 0 \leqslant j < r - \frac{1}{2}.$$

令

$$\varphi_k = f_k - \frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0),$$

则有

$$\varphi_k \in H^{p_k}(\boldsymbol{R}_+^n), \quad D_{x_n}^j \varphi_k(x', 0) = 0, j < p_k - \frac{1}{2},$$

$$\int_0^\infty \int_{\boldsymbol{R}^{n-1}} |D_{x_n}^j \varphi_k(x', \sigma)|^2 dx' \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad j = p_k - \frac{1}{2}.$$

由引理3.3，存在 $\omega_k \in H^{r,s}(\boldsymbol{R}_+^n \times \boldsymbol{R}_+^1)$ 满足

$$D_{x_n}^j \omega_k(x', 0, t) = 0, \quad j < r - \frac{1}{2},$$

$$D_t^k \omega_k(x, 0) = \varphi_k.$$

令

$$\tilde{\omega}_k(x, t) = \sum_{m=1}^{[s]+1} a_m \omega_k(x, mt),$$

a_m 是下列线性方程组的解

$$\sum_{m=1}^{[s]+1} a_m m^i = \delta_{ik}, \quad i=0,1,\cdots,[s].$$

则 $\tilde{\omega}_k$ 满足

$$D_{x_n}^j \omega_k(x',0,t)=v, \quad j<r-\frac{1}{2},$$

$$D_t^i \omega_k(x,0)=\delta_{ki}\varphi_k, \quad 0\leqslant i<s-\frac{1}{2}.$$

最后令

$$\omega=\sum_{0<k<s-\frac{1}{2}} \tilde{\omega}_k,$$

则 ω 满足

$$D_{x_n}^j \omega(x',0,t)=0, \quad j<r-\frac{1}{2},$$

$$\omega^{(k)}(x,0)=\varphi_k, \quad k<s-\frac{1}{2}.$$

$u=v+\omega$ 即满足

$$D_t^k u(x,0)=f_k(x), \quad 0\leqslant k<s-\frac{1}{2},$$

$$D_{x_n}^j u(x',0,t)=g_j(x',t), \quad 0\leqslant j<r-\frac{1}{2}.$$

由构造 u 的过程可知 u 满足所要求的估计。 ▎

§3 空间 $W(0,T;V)$

在第二章中，我们在 $f\in H^{-1}(\Omega)=(H_0^1(\Omega))'$ 的条

件下解方程

$$u\in H_0^1(\Omega),\quad -\triangle u=f.$$

其意义是

$$\int_\Omega Du\cdot Dv\mathrm{d}x=(f,v),\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

或等价地，上式对任意 $v\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立。这里的 u 是弱解。对于热传导方程

$$-\frac{\partial u}{\partial t}-\triangle u=f,\quad u(x,0)=u_0(x),$$

$f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，我们要求弱解 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，这时 $\Delta u\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，相应地$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$。那么初条件 $u(x,0)=u_0(x)$是什么意义呢？我们将证明在条件 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$和$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 之下，u 在$[0,T]$上作为 $L^2(\Omega)$ 值函数是连续的，所以必须假设 $u_0\in L^2(\Omega)$，并且初条件的意义是

$$\|u(\cdot,t)-u_0\|_{L^2(\Omega)}\to 0\quad (t\to 0+).$$

这实质上是一元抽象函数的迹的问题。

3.1 空间$W(0,T;V)$的定义和完备性

设V和H是两个复 Hilbert 空间，满足条件

$$V\subsetneq H;\quad V在H中稠密;\quad |u|=0\Rightarrow\|u\|=0. \qquad (3.30)$$

这里$|\ \ |$和$\|\ \ \|$分别表示H和V中的范数，对应于内积$(\ ,\ )$和$((\ ,\ ))$。$V\subsetneq H$的意思是$V\subset H$且存在常数C使

$$|u|\leqslant C\|u\|,\quad \forall u\in V.$$

(3.30)第三个条件的意思是恒等映射 $u\to u$ 从V到H是单射。

以下，我们总是把H与其共轭对偶空间H'等同，即把$u\in H$与H'中的下列元素

$$(fu,v)=(u,v),\quad \forall v\in H$$

等同。

对固定的u和任意的$v\in V$，我们有

$$|(u,v)|\leqslant|u||v|\leqslant C|u|\|v\|,$$

即$(u,\cdot)\in V'$，并且$\|(u,\cdot)\|_{V'}\leqslant C|u|$我们记成$u\in V'$。由$V$在$H$中的稠密性可知，若对任意$v\in V$，$(u,v)=0$，必有$u=0$。对这些事实，我们以下列写法表示

$$V\subsetneq H=H'\subsetneq V'. \tag{3.31}$$

提请读者注意，H与H'间的同构是根据Riesz表示定理通过H中的内积建立起来的，而V和V'之间亦可通过V中的内积建立同构，但这两个内积一般不等价，因而一般绝不能由(3.31)推得$V=H=H'=V'$这样荒唐的结论。

引理3.5 在条件(3.30)之下，H在V'中稠密。

证明 在V'中以下列方式引入内积：对任意$f,g\in V'$由Riesz表示定理，存在唯一的$u_f,u_g\in V$使

$$(f,v)=((u_f,v)),(g,v)=((u_g,v)),\quad \forall v\in V.$$

令

$$((f,g))'=((u_f,u_g)).$$

现设$f\in V'$，满足

$$((f,g))'=0,\quad \forall g\in H'\subset V'.$$

对任意$g\in H$，存在$u_g\in V$使

$$(g,v)=((u_g,v)),\quad \forall v\in V,$$

特别取$v=u_f$得

$$(g,u_f)=((u_g,u_f))=((g,f))'=0.$$

再令$g=u_f$得$|u_f|=0$，由条件(3.30)，$\|u_f\|=0$，即$f=0$。

这说明对任意 $f\in V'$，由 $((f,g))'=0$，$\forall g\in H$，推得 $f=0$，根据正交分解定理，这即表明 H 在 V' 中的稠密性。 ▍

定义3.16 设 $I\subset \boldsymbol{R}^1$ 是一个区间，H,V 是满足条件(3.30)的 Hilbert 空间，定义空间

$$W=W(I;V)=\left\{v\in L^2(I;V)\ \middle|\ v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\in L^2(I;V')\right\}$$

和范数、内积

$$((u,v))_W=\int_I (((u(t),v(t)))+((u'(t),v'(t)))')\mathrm{d}t,$$

$$\|u\|^2_W=((u,u))_W.$$

这里 v' 表示 v 的广义导数(见定义3.12)。

定理3.12 空间 W 是 Hilbert 空间。

证明 只需证明 W 的完备性。设 u_n 是 W 中的一个Cauchy序列，$\|u_n-u_m\|_W\to 0$ $(n,m\to\infty)$。此即

$$\|u_n-u_m\|_{L^2(I;V)}\to 0,\quad \|u'_m-u'_n\|_{L^2(I;V')}\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

由 $L^2(I;V)$ 和 $L^2(I;V')$ 的完备性，存在 u 和 v 满足

$$\|u_n-u\|_{L^2(I;V)}\to 0,\quad \|u'_n-v\|_{L^2(I;V')}\to 0,\quad n\to\infty.$$

实际上 $v=u'$。因为对任意 $\varphi\in C_0^\infty(I)$，由 u'_n 的定义

$$\int_I u_n\varphi'\,\mathrm{d}t=-\int_I u'_n\varphi\,\mathrm{d}t,$$

令 $n\to\infty$ 取极限即得

$$\int_I u\varphi'\,\mathrm{d}t=-\int_I v\varphi\,\mathrm{d}t,$$

由抽象函数广义导数的定义，$v=u'$，于是 $\|u_n-u\|_W\to 0$ $(n\to\infty)$。 ▍

3.2 $W(I;V)\hookrightarrow C(\bar{I};H)$

本节主要是证明对初值问题有基本重要性的下列嵌入定理。

定理3.13 设V和H满足(3.30)，$I\subset \mathbf{R}^1$是一个区间，则$W(I,V)\subset C^0(\bar{I},H)$。

为证明这个定理，我们需要建立以下各引理。

引理3.6 $C_0^\infty(\mathbf{R}^1;V)$在$I$上的限制在$W(I;V)$中稠密。

证明 先归结为$I=\mathbf{R}^1$的情形。若$I=(a,b)$，a和b为实数。做函数θ_1和$\theta_2\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$满足

$$\theta_1(t)+\theta_2(t)=1,\quad t\in(a,b);$$

$\theta_1(\theta_2)$在$b(a)$的一个邻域内为零。

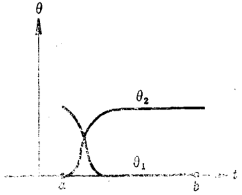


图 14

对$W(a,b;V)$中的函数u作分解

$$u=\theta_1u+\theta_2u,$$

则$\theta_1u(\theta_2u)$在$b(a)$的一个邻域内取V中的零元素，作延拓

$$\widetilde{\theta_1u}(t)=\begin{cases}\theta_1u(t), & a<t<b;\\ 0, & t\geqslant b.\end{cases}$$

$$\widetilde{\theta_2 u}(t)=\begin{cases}\theta_2 u(t), & a<t<b;\\ 0, & t\leqslant a.\end{cases}$$

可直接验证

$$\widetilde{\theta_1 u}\in W(a,\infty;V),\quad \widetilde{\theta_2 u}\in W(-\infty,b;V).$$

设 $I=(a,+\infty)$，$u\in W(a,+\infty;V)$，作 u 的平移

$$u_h(t)=u(t+h),\ t>a-h,\ h>0,$$

可直接验证

$$\|u_h-u\|_{W(0,+\infty;\ V)}\to 0\quad (h\to 0+).$$

做函数 $\psi\in C^\infty(\boldsymbol{R}^1)$满足

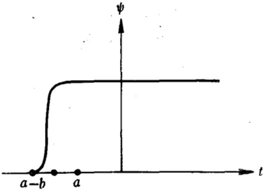


图 15

$$\psi(t)=\begin{cases}1, & t>a-h/2;\\ 0, & t<a-h.\end{cases}$$

令

$$v_h(t)=\begin{cases}\psi(t)u_h(t), & t\geqslant a-h;\\ 0, & t<a-h.\end{cases}$$

显然 $v_h\in W(\boldsymbol{R}^1;V)$。

现在证 $C^\infty(\boldsymbol{R}^1;V)\cap W(\boldsymbol{R}^1;V)$在 $W(\boldsymbol{R}^1;V)$中稠密。由于面临的是全直线 $\boldsymbol{R}^1$，便于利用跟光滑子的卷积实现光滑化。设 $\rho=\rho(t)$是一维光滑子，做卷积

$$u_\varepsilon(t)=u*\rho_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\int_{R^1}u(\tau)\rho\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)d\tau.$$

跟数值函数的情形雷同，可直接验证$u_\varepsilon\in C^\infty(R^1;V)$，并可在积分号下直接求导数得

$$u'_\varepsilon(t)=\frac{du_\varepsilon(t)}{dt}=\varepsilon^{-1}\int_{R^1}u(\tau)\frac{d}{dt}\left(\rho\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)\right)d\tau$$

$$=-\varepsilon^{-1}\int_{R^1}u(\tau)\frac{d}{d\tau}\left(\rho\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)\right)d\tau,$$

这里$\rho\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)$作为$\tau$的函数属于$C_0^\infty(R^1)$，由抽象函数广义导数$u'$的定义，我们得到

$$u'_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\int_{R^1}u'(\tau)\rho\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right)d\tau.$$

由变量替换$(t-\tau)/\varepsilon$(τ是变量)$\to\tau'$得

$$u_\varepsilon(t)=\int_{R^1}u(t-\varepsilon\tau)\rho(\tau)d\tau,$$

故由 Minkowski 不等式得

$$\|u_\varepsilon-u\|_{L^2(R^1;V)}$$

$$=\left(\int_{R^1}\left\|\int_{R^1}(u(t-\varepsilon\tau)-u(t))\rho(\tau)d\tau\right\|_V^2dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\int_{R^1}\left(\int_{R^1}\|u(t-\varepsilon\tau)-u(t)\|\rho(\tau)d\tau\right)^2dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\int_{-1}^1\left(\int_{R^1}\|u(t-\varepsilon\tau)-u(t)\|^2dt\right)^{1/2}\rho(\tau)d\tau.$$

由 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$ 中平移的连续性，立刻得到

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to +0).$$

类似可得

$$\|u'_\varepsilon - u'\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to +0).$$

这两个极限即表明

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)} \to 0 \quad (\varepsilon \to +0).$$

最后进行紧支化。设 $u \in C^\infty(\boldsymbol{R}^1;V) \cap W(\boldsymbol{R}^1;V)$，取一元截断函数 $\zeta \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1)$，

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1; \\ 0, & |t| > 2. \end{cases}$$

令

$$u_m(t) = u(t)\zeta\left(\frac{t}{m}\right), \quad m = 1, 2, \cdots.$$

可直接验证

$$u_m \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1;V), \quad \|u_m - u\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)} \to 0 \quad (m \to \infty). \quad \blacksquare$$

引理3.7 存在连续延拓算子 P：$W(I;V) \to W(\boldsymbol{R}^1;V)$，使对每一 $u \in W(I;V)$ 有

$$(Pu)(t) = u(t), \quad \text{a.e. } t \in I,$$

$$\|Pu\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)} \leqslant C\|u\|_{W(I;V)}.$$

C 是与 u 无关的常数。

证明 由引理 3.6 证明的第一步可知可归结为 $(a, +\infty)$ 的情形，经过平移可设 $a=0$。对 $u \in C^\infty([0,\infty);V)$ 做偶延拓

$$Pu(t) = \begin{cases} u(t), & t \geqslant 0; \\ u(-t), & t < 0. \end{cases}$$

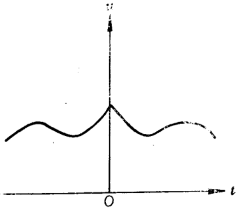


图 16

由 u 在 0 的右连续性，不难证明

$$(Pu)'(t)=\begin{cases} u'(t), & t\geqslant 0;\\ -u'(-t), & t<0. \end{cases}$$

故

$$\|Pu\|_{W(R^1;V)}\leqslant 2\|u\|_{W(R^1_+;V)}.$$

对每一 $u\in W(0,\infty;V)$，由引理3.6，存在 $u_m\in C^\infty([0,\infty);V)$，满足

$$\|u_m-u\|_{W(0,\infty;V)}\to 0\ (m\to\infty),$$

$$\|Pu_m-Pu_n\|_{W(R^1;V)}\leqslant 2\|u_m-u_n\|\to 0\ (m,n\to\infty).$$

由$W(\boldsymbol{R}^1;V)$的完备性，存在 $Pu\in W(\boldsymbol{R}^1;V)$使

$$\|Pu_n-Pu\|_{W(R^1;V)}\to 0\ (n\to\infty).$$

更有

$$\|u_n-Pu\|_{L^2(0,\infty;V)}\leqslant\|Pu_n-Pu\|_{L^2(0,\infty;V)}\to 0\ (n\to\infty),$$

$$\|u_n-u\|_{L^2(0,\infty;V)}\to 0\ (n\to\infty).$$

所以

$$u=Pu,\ \text{a.e.于}(0,\infty).$$

由$\|Pu_n\|\leqslant 2\|u_n\|$得

$$\|Pu\|\leqslant 2\|u\|. \quad \blacksquare$$

定理3.13的证明 设$u\in W(I;V)$，P是由前一引理提供的延拓算子，由引理3.6，存在$u_n\in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^1;V)$满足

$$\|Pu-u_n\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

由 Newton-Leibniz 公式

$$|u_n(t)|^2=\int_{-\infty}^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}|u_n(\sigma)|^2d\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}(u_n(\sigma),u_n(\sigma))\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{-\infty}^t((u_n'(\sigma),u_n(\sigma))+(u_n(\sigma),u_n'(\sigma)))\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\mathrm{Re}\int_{-\infty}^t(u_n'(\sigma),u_n(\sigma))\mathrm{d}\sigma$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^t\|u_n'(\sigma)\|'\|u_n(\sigma)\|\mathrm{d}\sigma\quad(\|\quad\|'\text{：}V'\text{中的范数})$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^\infty\|u_n'(\sigma)\|'^2+\int_{-\infty}^\infty\|u_n(\sigma)\|^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\|u_n\|^2_{W(\boldsymbol{R}^1;V)}.$$

由此得

$$\sup_{\boldsymbol{R}^1}|u_n(t)|\leqslant\|u_n\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)}.$$

以u_n-u_m代入上式

$$\sup_{\boldsymbol{R}^1}|u_n(t)-u_m(t)|\leqslant\|u_n-u_m\|_{W(\boldsymbol{R}^1;V)}\to 0\quad(n,m\to\infty),$$

于是$\boldsymbol{R}^1\to H$的函数u_n在$\boldsymbol{R}^1$上一致收敛. 又$u_n\in C(\boldsymbol{R}^1;V)$ $\hookrightarrow C(\boldsymbol{R}^1;H)$，故在$H$中

$$u_n(t)\to v(t),\quad n\to\infty,$$

关于 $t\in \boldsymbol{R}^1$ 一致，且 $v\in C(\boldsymbol{R}^1;H)$。又存在子列

$$u_{n_k}\to Pu,\ \text{a.e.于}\boldsymbol{R}^1,$$

故在 I 上 $u(t)=v(t)$, a.e. ▍

由证明看出，$u\in C(\bar{I};H)$ 的意义是 u 跟一个在 $\bar{I}$ 上连续的函数 v 几乎处处相等。今后写 $u(a)$，就把它理解为连续函数 v 的值 $v(a)$，这实值就是 u 在点 a 的迹。

3.3 $W(a,b;V)$ 中的分部积分公式

定理3.14 设，$-\infty<a<b<+\infty$, $u,v\in W(a,b;V)$，则

$$\int_b^a (u'(t),v(t))\mathrm{d}t+\int_b^a (u(t),v'(t))\mathrm{d}t$$

$$=(u(b),v(b))-(u(a),v(a)).$$

证明 对 $u,v\in C^\infty([a,b],V)$，由 Newton-Leibniz 公式得

$$(u(b),v(b))-(u(a),v(a))$$

$$=\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b ((u'(t),v(t))+(u(t),v'(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b ((u'(t),v(t))_{V',V}+(u(t),v'(t))_{V,V'})\mathrm{d}t$$

由逼近推理知上式对 $u,v\in W(a,b;V)$ 亦成立。▍

§4 Lions 定理和抛物型方程

在做了上述繁重而必须的准备之后，我们现在着手研究

抛物型方程。讨论解的存在性的基本工具是 Lions 定理，它是Lax-Milgram 定理的推广，便于对发展方程应用。

4.1 Lions 定理

仍以热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & Q = \Omega \times (0,T)\text{内}, \\ u = 0, & \Sigma = \partial\Omega \times (0,T)\text{上}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega\text{内} \end{cases}$$

为例，说明抛物型方程弱解概念。我们以检验函数 $\varphi \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ 乘方程两端，这里设 $\varphi(x,T)=0$，$\forall x \in \Omega$，在 Q 上对 (x,t) 积分。关键性的一步是进行分部积分。这里把对解对 x 的二阶导数分一半给检验函数，解关于 t 的导数总共只有一阶，不好平方，只好完全转移到检验函数上，考虑到

$$u|_\Sigma = 0, u(x,0) = u_0 \text{ 和 } \varphi(x,T) = 0,$$

我们得到，对任意满足 $\varphi(\cdot,T)=0$ 的 $\varphi \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$ 有

$$-\int_0^T \int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega Du \cdot D\varphi \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u_0\varphi(0)\mathrm{d}x.$$

这就是弱解应当满足的变分形式的方程，即将看到，它包含了解的所有信息。

引入记号

$$E(u,\varphi) = -\int_0^T \int_\Omega u\varphi' \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega Du \cdot D\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$(L,\varphi)=\int_0^T\int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega u_0\varphi(0)\,\mathrm{d}x,$$

则上述等式写为

$$u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),E(u,\varphi)=(L,\varphi),$$

$$\forall\varphi\in\Phi=\{\varphi\in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))\,|\,\varphi(T)=0\}.$$

从E是双线性型和L是线性泛函这一点来看，这里的形式和椭圆型的形式相同。但有一个本质的不同，这里的解和检验函数属于不同的空间。

定理3.15 (Lions)　设F是一个Hilbert空间，范数为$\|\ \|_F$，Φ是F的一个子空间，对于范数$\|\ \|_\Phi$是一个内积空间，$E(u,\varphi)$是定义在$F\times\Phi$上的一个共轭双线性型，设存在常数C使

$$\|u\|_F\leqslant C\|\varphi\|_\Phi,\quad\forall\varphi\in\Phi,$$

$$\forall\varphi\in\Phi,\ E(\cdot,\varphi)\text{在}F\text{上连续},$$

刚存在$a>0$，使

$$\mathrm{Re}E(\varphi,\varphi)\geqslant a\|\varphi\|_\Phi^2,\quad\forall\varphi\in\Phi.$$

又设L是Φ上的一个有界共轭线性泛函，则存在$u\in F$使

$$E(u,\varphi)=L(\varphi),\quad\forall\varphi\in\Phi.\tag{3.32}$$

证明　对固定的$\varphi\in\Phi$，$E(\cdot,\varphi)$既是F上的有界线性泛函，由Riesz表示定理存在唯一的$A\varphi\in F$满足

$$(u,A\varphi)_F=E(u,\varphi),\quad\forall u\in F.$$

现考虑映射A：$\varphi\to A\varphi$，它映Φ到F内。由$E(u,\varphi)$关于φ的共轭线性知A是线性的。又由

$$a\|\varphi\|_\Phi^2\leqslant\mathrm{Re}E(\varphi,\varphi)=\mathrm{Re}(\varphi,A\varphi)_F\leqslant\|\varphi\|_F\|A\varphi\|_F\leqslant C\|\varphi\|_\Phi\|A\varphi\|_F$$

得估计

$$\|\varphi\|_\Phi\leqslant\frac{C}{a}\|A\varphi\|_F,\quad\forall\varphi\in\Phi.$$

从而A是单射，A^{-1}存在且满足

$$\|A^{-1}f\|_\Phi\leqslant\frac{C}{\alpha}\|f\|_F,\quad \forall f\in A\Phi. \tag{3.33}$$

又方程(3.32)等价于

$$u\in F,\ (u,f)_F=L(A^{-1}f),\quad \forall f\in A\Phi, \tag{3.34}$$

而A^{-1}从$A\Phi$到F有界线性，L从F到复数域$\boldsymbol{C}$共轭线性且有界，故$f\to L(A^{-1}f)$从$A\Phi$到$\boldsymbol{C}$有界共轭线性，$A\Phi$是F的线性子空间，由连续性可把$L(A^{-1}\cdot)$延拓到$\overline{A\Phi}$，再由正交分解定理，对任一$u\in F$，有唯一分解

$$u=u_1+u_2,\quad u_1\in\overline{A\Phi},u_2\perp\overline{A\Phi},$$

令
$$\tilde{L}(u)=L(A^{-1}u_1),$$

$\tilde{L}$显然是F上的有界共轭线性泛函，再由Riesz表示定理，存在$u\in F$使

$$(u,f)_F=\tilde{L}(f),\quad \forall f\in F.$$

$f\in A\Phi$，这便是(3.34)式。▌

注意证明中我们令$\tilde{L}$在$\overline{A\Phi}$的正交补上为零而得到$L(A^{-1}\cdot)$的延拓，但显然$L(A^{-1}\cdot)$的延拓方式当$\overline{A\Phi}\neq F$时是无穷无尽的，所以一般沒有解的唯一性。又当$\Phi=F$时从Lions定理又得到Lax-Milgram定理。

4.2 抽象抛物型方程解的存在唯一性

定理3.16 设可分Hilbert空间V和H满足条件(3.30)，$[0,T]\subset\boldsymbol{R}^1$，对任意$t\in[0,T]$，$a(t,u,v)$是$V$上的一个共轭双线性型，满足条件

1) 对任意$u,v,a(\cdot,u,v)$在$(0,T)$可测（可测性），

2) 存在与$t\in[0,T]$无关的常数M使

$|a(t,u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|$，a.e.$t\in(0,T)$，$\forall u,v\in V$(有界性)，

3) 存在$\lambda>0$和$\alpha>0$使

$\mathrm{Re}a(t,v,v)+\lambda|v|^2\geqslant\alpha\|v\|^2$, $\forall v\in V$, a.e. $t\in(0,T)$(强制性),

则与$a(t,u,v)$相应一个算子$A(t)\in\mathscr{L}(V,V')$满足

$$a(t,u,v)=(A(t)u,v),$$

并且对任意$f\in L^2(0,T;V')$, $u_0\in H$, 存在唯一的弱解$u\in W(0,T;V)$满足

$$\begin{cases}u'(t)+A(t)u(t)=f(t), & \text{a.e. } t\in(0,T);\\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{3.35}$$

从$L^2(0,T;V')\times H\to W(0,T;V)$的映射$(f,u_0)\to u$连续。

证明 利用未知函数变换$u(t)=e^{\lambda t}w(t)$, 可归结为$\lambda=0$的情形。令

$$F=L^2(0,T;V),$$

$$\Phi=\{\varphi\in C^1([0,T];V)\,|\,\varphi(T)=0\},$$

$$\|\varphi\|_\Phi^2=\|\varphi\|_F^2+|\varphi(0)|^2=\|\varphi\|_{L^2(0,T;\,V)}^2+|\varphi(0)|^2.$$

对于内积

$$((\varphi,\psi))_\Phi=((\varphi,\psi))_F+(u(0),v(0)),$$

Φ是一个内积空间。显然

$$\|\varphi\|_F\leqslant\|\varphi\|_\Phi.$$

定义共轭双线性型

$$E(u,\varphi)=\int_0^T[a(t,u(t),\varphi(t))-(u(t),\varphi'(t))]\mathrm{d}t,$$

$$u\in F,\varphi\in\Phi.$$

由下一个引理知对任意$u,v\in L^2(0,T;V)$, $a(t,u(t),v(t))\in L^1(0,T)$。因此$E(u,\varphi)$有意义。我们逐一验证$E$满足Lions定理的条件。

(1) $\forall\varphi\in\Phi$, $E(\cdot,\varphi)$在F上连续

$$|E(u,\varphi)|\leqslant M\|u\|_F\|\varphi\|_F+C^2\|u\|_F\|\varphi'\|_F.$$

(2) 对任意 $\forall\varphi\in\Phi$，我们有

$$\operatorname{Re}E(\varphi,\varphi)=\operatorname{Re}\int_0^T [a(t,\varphi(t),\varphi(t))-(\varphi(t),\varphi'(t))]\mathrm{d}t$$

$$\geqslant \alpha\int_0^T \|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\varphi(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\alpha\int_0^T \|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t+\frac{1}{2}|\varphi(0)|^2$$

$$\geqslant \min\left(\alpha,\frac{1}{2}\right)\|\varphi\|_\Phi^2.$$

最后令

$$L(\varphi)=\int_0^T (f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t+(u_0,\varphi(0)).$$

我们有

$$|L(\varphi)|\leqslant\int_0^T \|f(t)\|_{V'}\|\varphi(t)\|_V\mathrm{d}t+|u_0||\varphi(0)|$$

$$\leqslant\left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_V^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$+|u_0||\varphi(0)|$$

$$\leqslant\left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\mathrm{d}t+|u_0|^2\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_0^T \|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t+|\varphi(0)|^2\right)^{1/2}$$

$$=\left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\mathrm{d}t+|u_0|^2\right)^{1/2}\|\varphi\|_\Phi.$$

这表明 L 是 Φ 上的有界共轭线性泛函。

由Lions定理，至少存在一个 $u\in L^2(0,T;V)$ 满足

$$E(u,\varphi)=L(\varphi),\quad \forall\varphi\in\Phi,$$

或等价地

$$\int_0^T [a(t,u(t),\varphi(t))-(u(t),\varphi'(t))]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T (f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t+(u_0,\varphi(0)),\quad \forall\varphi\in\Phi. \tag{3.36}$$

我们证明(3.36)蕴涵(3.35)。对任意 $v\in V$，在(3.36)中取

$$\varphi(t)=\psi(t)v,\quad \psi\in C_0^\infty(0,T),$$

我们得

$$\left(\int_0^T (A(t)u(t)\bar{\psi}(t)-f(t)\bar{\psi}(t)-u(t)\bar{\psi}'(t))\mathrm{d}t,v\right)_{V',V}=0,$$

$$\forall v\in V.$$

注意这里利用了等式

$$\int_0^T (A(t)u(t),v)\bar{\psi}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T (A(t)u(t)\bar{\psi}(t),v)\mathrm{d}t=\left(\int_0^T A(t)u(t)\bar{\psi}(t)\mathrm{d}t,v\right). \tag{3.37}$$

事实上，由下面的引理知对任意 $v\in(V')'=V$，

$$(A(t)u(t),v)=a(t,u(t),v)$$

关于 t 可测。又 V 可分，由Pettis定理 $A(t)u(t)$ 作为 V' 值函数强可测。又 $\|A(t)u(t)\|_{V'}\leqslant M\|u(t)\|_V\in L^2(0,T)$，由Bochner定理，$A(\cdot)u(\cdot)\in L^2(0,T;V')$，且由推论3.2知等式(3.37)成立。由(3.37)得对任意 $\psi\in C_0^\infty(0,T)$，

$$\int_0^T (A(t)u(t) - f(t))\psi(t)\mathrm{d}t = \int_0^T u(t)\psi'(t)\mathrm{d}t.$$

由抽象函数广义导数的定义，这恰好表明

$$u'(t) = -(A(t)u(t) - f(t)),\ \text{a.e.}\, t \in (0,T),$$

即(3.35)中的方程成立。反之易知(3.35)蕴涵(3.36)。由方程(3.35)知 $u' \in L^2(0,T;V)$，从而 $u \in W(0,T;V)$。由定理3.13，$u \in C([0,T];H)$，$u(0)$有意义。今证 $u(0) = u_0$。任取 $\varphi \in \Phi$，方程(3.35)两端与 φ 作对偶积，并在$(0,T)$上积分，利用 $W(0,T;V)$ 中的分部积分公式得

$$\int_0^T a(t,u(t),\varphi(t))\mathrm{d}t - \int_0^T (u(t),\varphi'(t))\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T (f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t + (u(0),\varphi(0)).$$

此式与(3.36)比较得

$$(u(0) - u_0, \varphi(0)) = 0.$$

对任意 $v \in V$，取

$$\varphi(t) = \psi(t)v,\ \psi \in C^\infty([0,T]),\ \psi(0) = 1,\ \psi(T) = 0,$$

我们得

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

由 V 在 H 中的稠密性得 $u(0) - u_0 = 0$，即 $u(0) = u_0$。这就证明了 u 是解。

方程(3.35)两端与 $u(t)$ 作对偶积，并在$(0,T)$上积分，仍利用 $W(0,T;V)$ 中的分部积分公式得

$$\int_0^T a(t,u(t),u(t))\mathrm{d}t + \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \frac{1}{2}|u_0|^2 = \int_0^T (f,u)\mathrm{d}t.$$

由强制性条件(其中 $\lambda = 0$)

$$a\int_0^T \|u(t)\|^2 dt+\frac{1}{2}|u(T)|^2-\frac{1}{2}|u_0|^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2a}\int_0^T \|f\|'^2 dt+\frac{a}{2}\int_0^T \|u(t)\|^2 dt,$$

$$a\int_0^T \|u(t)\|^2 dt+|u(T)|^2\leqslant\frac{1}{a}\int_0^T \|f(t)\|'^2 dt+|u_0|^2.$$

又由等式

$$u'(t)=-A(t)u(t)+f(t)$$

和$\|A(t)\|_{\mathscr{L}(V,V')}\leqslant M$ 得

$$\left(\int_0^T \|u'(t)\|'^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leqslant M\left(\int_0^T \|u(t)\|^2 dt\right)^{1/2}+\left(\int_0^T \|f(t)\|'^2 dt\right)^{1/2}.$$

于是有

$$\|u\|_{W(0,T;V)}\leqslant C(\|f\|_{L^2(0,T;V')}+|u_0|).$$

由这个估计当然得到解的唯一性。 ∎

现在证明上面用到的

引理3.8 设共轭双线性型a满足定理3.16的条件，则对任意函数$u,v\in L^2(0,T;V)$，函数$a(t,u(t),v(t))\in L^1(0,T)$。

证明 首先证明$a(t,u(t),v(t))$在$(0,T)$可测。由u,v强可测定义，存在V中取值的简单函数列u_n,v_n满足

$\|u_n(t)-u(t)\|\to 0,\|v_n(t)-v(t)\|\to 0\ (n\to\infty)$ a.e. $t\in(0,T)$,

$$u_n=\sum_{i=1}^{N_n} b_i^n\chi_{E_i^n},v_n=\sum_{i=1}^{\tilde{N}_n}\tilde{b}_i^n\chi_{\tilde{E}_i^n},\quad b_i^n,\tilde{b}_i^n\in V,$$

$E_i^n\cap E_j^n=0,i\neq j,\tilde{E}_i^n\cap\tilde{E}_j^n=0,i\neq j,m(E_i^n)<\infty,m(\tilde{E}_i^n)<\infty.$

由于 a 是共轭双线性的，

$$a(t,u_n(t),u_n(t))=\sum_{i,j=1}^{N_n,\tilde{N}_n} a(t,b_i^n,\tilde{b}_j^n)\chi_{E_i^n}\chi_{\tilde{E}_j^n}.$$

由假设 $a(t,b_i^n,\tilde{b}_j^n)$ 可测，故 $a(t,u_n(t),v_n(t))$ 可测，而由 a 的有界性，

$$|a(t,u_n(t),v_n(t))-a(t,u(t),v(t))|$$
$$\leqslant|a(t,u_n(t)-u(t),v_n(t))|+|a(t,u(t),v_n(t)-v(t))|$$
$$\leqslant M\|u_n(t)-u(t)\|\|v_n(t)\|+M\|u(t)\|\|v_n(t)-v(t)\|\to 0$$
$$n\to\infty,\ \text{a.e. } t\in(0,T),$$

故 $a(t,u(t),v(t))$ 在 $(0,T)$ 可测。

由于

$$|a(t,u(t),v(t))|\leqslant M\|u(t)\|\|v(t)\|,$$
$$\|u(t)\|,\|v(t)\|\in L^2(0,T),$$

从 Cauchy-schwarz 不等式得

$$a(t,u(t),v(t))\in L^1(0,T). \quad \blacksquare$$

4.3 例子

Lions 定理及作为其推论的定理3.16几乎一劳永逸地解决了抛物型方程弱解的存在唯一性问题。椭圆型方程的例子差不多都可以自动转移到这里来。适当选取空间 V,H，双线性型 a 和线性泛函 L，就可解抛物型方程的初、边值问题。一般说来，古典意义下的方程乘以检验函数，在 $Q=\Omega\times(0,T)$ 上积分，进行分部积分，并注意利用初条件和边条件便可自然得到 a 和 L 的形式。

例1　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个有界区域，$Q=\Omega\times(0,T)$，$\Sigma=\partial\Omega\times(0,T)$，取 $V=H_0^1(\Omega)$，$H=L^2(\Omega)$，在 $H_0^1(\Omega)$ 考虑共轭双线性型

$$a(t,u,v)=\int_{\Omega}(a_{ij}(x,t)D_iuD_j\bar{v}$$
$$+b_i(x,t)(D_iu)\bar{v}+C(x,t)u\bar{v})\mathrm{d}x,$$

其中系数满足条件

$$a_{ij},b_i,C\in L^\infty(Q),$$
$$\alpha>0,\mathrm{Re}\,a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\mathrm{a.e.}(x,t)\in Q,\ \forall\xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

由 Gårding 不等式，存在 $\lambda>0$，$\delta>0$ 使

$$\mathrm{Re}a(v,v)+\lambda|v|^2\geqslant\delta\|v\|^2,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega),$$

这里 $|v|=\|v\|_{L^2(\Omega)}$，$\|v\|=\|v\|_{1,\Omega}$。显然

$$|a(t,u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|.$$

由定理6.16，对任意 $f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ 和 $u_0\in L^2(\Omega)$，存在唯一的 $u\in W(0,T;H_0^1(\Omega))$ 满足

$$\begin{cases}u'(t)+A(t)u(t)=f,\\ A(t)u=-D_j(a_{ij}(x,t)D_iu)+b_i(x,t)D_iu+C(x,t)u,\\ u(0)=u_0.\end{cases}$$

$u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 表明对 a.e. $t\in(0,T)$，$u(\cdot,t)\in H_0^1(\Omega)$，或在迹的意义下 $u|_{\Sigma}=0$。u 所满足的变分方程是

$$-\int_0^T\int_{\Omega}u(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega}(a_{ij}(x,t)D_iu(x,t)D_j\varphi(x,t)$$
$$+b_i(x,t)D_iu(x,t)\varphi(x,t)+C(x,t)u(x,t)\varphi(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T(f(t),\varphi(\cdot,t))\mathrm{d}t$$
$$+\int_{\Omega}u_0\varphi(x,0)\mathrm{d}x,\ \forall\varphi\in C^1([0,T],H_0^1(\Omega)).$$

例如可取

$$f(x,t)=f_0(x,t)+D_if_i(x,t),\quad f_0,f_1,\cdots,f_n\in L^2(Q).$$

这时

$$\int_0^T (f(t),\varphi(\cdot,t))\mathrm{d}t=\int_0^T\int_\Omega (f_0(x,t)\varphi(x,t)$$

$$+f_i(x,t)D_i\varphi(x,t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

例 2 $V=H^1(\Omega),H=L^2(\Omega),a,a_{ij},b_i,c$ 如例1，强制性和有界性仍然成立，$f\in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$，$u_0\in L^2(\Omega)$。由定理3.16存在唯一的 $u\in W(0,T;H^1(\Omega))$满足

$$-\int_0^T (u(t),\varphi'(t))\mathrm{d}t+\int_0^T a(t,u(t),\varphi(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T (f,\varphi)\mathrm{d}t+(u_0,\varphi(0)),$$

$$\forall \varphi\in C^\infty([0,T],H^1(\Omega)),\varphi(T)=0,$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au=f.$$

若 u 光滑，方程两端乘以 $\varphi\in C^\infty([0,T];H^1(\Omega)),\varphi(T)=0$，在 Q 上积分，利用分部积分公式和 Green 公式得

$$-\int_0^T(u,\varphi')\mathrm{d}t+\int_0^T a(t,u,\varphi)\mathrm{d}t-\int_{\partial\Omega} a_{ij}D_iu\nu_j\varphi\mathrm{d}\Gamma$$

$$=\int_0^T (f,\varphi)\mathrm{d}t+(u_0,\varphi(0)).$$

和前面的变分方程比较得

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}=a_{ij}(x,t)D_iu(x,t)\nu_j=0,\ \partial\Omega\text{上},$$

其中 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$为 $\partial\Omega$ 的单位法向量。于是 u 是下列 Cauchy-Neumann 问题的解

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{ 内},\\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}=0, & \Sigma\text{ 上},\\[1ex]
u(0)=u_0, & \Omega\text{内。}
\end{cases}
$$

例 3 取 $V=\{u\in H^1(\Omega)\,|\,u|_{\Gamma_0}=0\}$，$\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1$，$H=L^2(\Omega)$，$a$ 同前，相应地得到 $u\in W(0,T;V)$ 是下列方程的弱解：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{ 内},\\
u=0, & \Sigma_0=\Gamma_0\times(0,T)\text{上},\\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}=0, & \Sigma_1=\Gamma_1\times(0,T)\text{上},\\
u(0)=u_0 & \Omega\text{ 内。}
\end{cases}
$$

例 4 尽管应用中往往取 $H=L^2(\Omega)$，但有时也会取其它空间充任 H，且举一例。令 $H=H_0^1(\Omega)$，其内积定义为

$$(u,v)=\int_\Omega Du\cdot Dv\,\mathrm{d}x.$$

设 Ω 有界，由确实是 $H=H_0^1(\Omega)$ 上的一个内积，取

$$V=\{v\in H=H_0^1(\Omega)\,|\,D_i(\Delta v)\in L^2(\Omega),i=1,\cdots,n\}$$

V 上的范数为

$$\|v\|_V^2=\|v\|_H^2+\sum_{i=1}^n\|D_i(\Delta v)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

V 上的共轭双线性型取为

$$a(u,v)=\int_\Omega D_i(\Delta u)D_i(\Delta \bar{v})\,\mathrm{d}x.$$

显然

$$a(v,v)+\|v\|_H^2=\|v\|_V^2.$$

由定理3.16存在唯一的 $u\in W(0,T;V)$ 满足(3.35)，形式上，u 是下列问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\Delta^2 u=f, & Q\text{内}, \\ u=0,\ \dfrac{\partial\Delta u}{\partial\nu}=0, & \Sigma\text{上}, \\ u(0)=u_0 & \Omega\text{内}. \end{cases}$$

例5 Schröedinger 型方程。V 和 H 如 Lions 定理所述，$a(t,u,v)$ 是 V 上的有界共轭双线性型，满足下列条件

1) 对任意 $u,v\in V$，函数 $a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T])$，

2) $a(t,u,v)=\overline{a(t,v,u)}$，

3) 存在 $\lambda>0$，$\alpha>0$ 使 $a(t,v,v)+\lambda|v|^2\geqslant\alpha\|v\|_V^2$，$\forall v\in V$。我们要解 Schröedinger 型方程

$$\begin{cases} i\omega a(t,u(t),v)+(u'(t),v)=(g(t),v),\ \forall v\in V, \\ u(0)=0. \end{cases} \tag{3.38}$$

其中 ω 是一个不等于零的实数，g 和 $g'\in L^2(0,T;V)$。在这些条件下我们要证明问题(3.38)有唯一解，并且存在常数 C 使

$$\int_0^T\|u(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C\int_0^T(\|g(t)\|^2+\|g'(t)\|^2)\mathrm{d}t. \tag{3.39}$$

如有必要换 u 为 $\exp(ikt)u$，适当选取 k，总可归结为3)中 $\lambda=0$ 的情形。延拓 $a(t,u,v)$ 使1)、2)、3)在 $\boldsymbol{R}^1$ 仍成立，并且 $a(t,u,v)$ 和 $a'(t,u,v)$ 在 $\boldsymbol{R}^1\times V\times V$ 上有界，这里 $a'(t,u,v)$ 表示对固定的 $u,v\in V$，函数 $t\mapsto a(t,u,v)$ 的导数。取 $\gamma>0$ 使对某个常数 $\alpha_1>0$ 有

$$2\gamma a(t,v,v)-a'(t,v,v)\geqslant\alpha_1\|v\|^2,\quad \forall v\in V,t\in\boldsymbol{R}^1. \tag{3.40}$$

今取

$$F=\{u \mid \exp(-\gamma t)u\in L^2(0,\infty;V)\},$$

$$\|u\|_F^2=\int_0^\infty \|\exp(-\gamma t)u(t)\|^2 dt,\ ((u,v))=((u,v))_F$$

$$\Phi=\{\varphi\in F \mid \exp(-\gamma t)\varphi'\in L^2(0,\infty;V),$$

$$\exp(-\gamma t)\varphi''\in L^2(0,\infty;H),\ \varphi(0)=0\},$$

$$\|\varphi\|_\Phi=\|\varphi\|_F,$$

$$E(u,\varphi)=\mathrm{i}\omega\int_0^\infty a(t,u(t),\exp(-2\gamma t)\varphi'(t))dt$$

$$-\int_0^\infty (u(t),D_t(\exp(-2\gamma t)\varphi'(t)))dt,$$

$$L(\varphi)=\int_0^\infty ((\tilde{g}(t),\exp(-2\gamma t)\varphi'(t)))dt.$$

这里 $\tilde{g}$ 是 g 到 $\boldsymbol{R}^1$ 上的延拓，保持性质 $\tilde{g},\tilde{g}_t\in L^2(0,\infty;V)$。$((\ ,\ ))$是 V 中的内积。由于 $\varphi(0)=0$，分部积分得

$$L(\varphi)=-\int_0^\infty ((\tilde{g}'(t),\exp(-2\gamma t)\varphi(t)))dt$$

$$+2\gamma\int_0^\infty ((\tilde{g}(t),\exp(-2\gamma t)\varphi(t)))dt.$$

于是 L 在 Φ 上连续。又利用共轭对称条件2)得

$$2\mathrm{Im}E(\varphi,\varphi)=\omega\int_0^\infty \exp(-2\gamma t)[2\gamma a(t,\varphi,\varphi)-a'(t,\varphi,\varphi)]dt.$$

由(3.40)得

$$|\mathrm{Im}E(\varphi,\varphi)|\geqslant\frac{1}{2}\alpha_1|\omega|\|\varphi\|^2.$$

根据 Lions 定理存在 $u\in F$ 使

$$E(u,\varphi)=L(\varphi),\ \forall\varphi\in\Phi. \tag{3.41}$$

设 $\psi\in C_0^\infty(0,\infty)$，则对任意 $v\in V$，

$$\varphi(t)=\int_0^t \psi(t)dt\, v\in\Phi,$$

由(3.41)推知

$$\mathrm{i}\omega a(t,u(t),v)+(u'(t),v)=((g(t),v)),\quad \forall v\in V.$$

限制在$(0,T)$上即知u满足(3.38)，从而$u'\in L^2(0,T;V')$，$u\in W(0,T;V)$.$u(0)$有意义，且用通常的方法可证$u(0)=0$。由$a(t,u,v)=(A(t)u,v)$定义算子$A(t)\in\mathscr{L}(V,V')$，u满足

$$\mathrm{i}\omega A(t)u(t)+u'(t)=g(t),$$

此式两端与$u(t)$作对偶积，在$(0,t)$上积分，利用$W(0,T;V)$中的分部积分公式得

$$\mathrm{i}\omega\int_0^t a(t,u(t),u(t))\mathrm{d}t+\frac{1}{2}|u(t)|^2=0,$$

取实部得$u(t)=0,t\in(0,T)$，唯一性得证。估计式(3.39)的证明留作习题。

例6 周期解问题。V,H和f如Lions定理所述，求$u\in W(0,T;V)$满足

$$\int_0^T[a(t,u(t),\varphi(t))-(u(t),\varphi'(t))]\mathrm{d}t=\int_0^T(f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t,\tag{3.42}$$

其中

$$\varphi\in\Phi=\{\varphi\in C^\infty([0,T],V)\,|\,\varphi(0)=\varphi(T)\}.$$

令

$$F=L^2(0,T;V),\ \|\varphi\|_\Phi=\|\varphi\|_F,$$

$$E(u,\varphi)=\int_0^T[a(t,u,\varphi)-(u,\varphi')]\mathrm{d}t,$$

$$L(\varphi)=\int_0^T(f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

对固定的$\varphi\in\Phi$,$E(\cdot,\varphi)$显然在F上连续，$L(\cdot)$在Φ上连续，

$$\mathrm{Re}E(\varphi,\varphi)=\int_0^T \mathrm{Re}\, a(t,\varphi,\varphi)\mathrm{d}t$$
$$-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}|\varphi(T)|^2-\frac{1}{2}|\varphi(0)|^2\right)$$
$$=\int_0^T \mathrm{Re}\, a(t,\varphi,\varphi)\mathrm{d}t\geqslant\alpha\int_0^T\|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t$$
$$=\alpha\|\varphi\|_\Phi.$$

由 Lions 定理，问题(3.42)有解 $u\in W(0,T;V)$满足(3.42)，从而有

$$u'(t)+A(t)u=f, \tag{3.43}$$

其中$(A(t)u,v)=a(t,u,v)$。上式与 $\varphi\in\Phi$ 做对偶积，在$(0,T)$上积分并进行分部积分得

$$\int_0^T[a(t,u,\varphi)-(u',\varphi')]\mathrm{d}t+(u(T),v(T))-(u(0),v(0))$$
$$=\int_0^T(f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t,$$

此式与(3.42)比较得

$$(u(T),\varphi(T))-(u(0),\varphi(0))=0,\quad \forall\varphi\in\Phi.$$

对任意 $v\in V$，取 $\psi\in C^\infty([0,T])$，$\psi(0)=\psi(T)=1$，以 $\varphi=\psi v$代入上式得

$$(u(T)-u(0),v)=0,\quad \forall v\in V.$$

由V在H中的稠密性，此式给出 $u(T)=u(0)$。

(3.43)与 $u(t)$作对偶积，利用u的周期性，由通常方式得

$$\int_0^T a(t,u(t),u(t))\mathrm{d}t=\int_0^T(f(t),u(t))\mathrm{d}t.$$

由 a 的强制性和 Schwarz 不等式得

$$\alpha\|u\|_F^2\leqslant\|f\|_{F'}\|u\|_F,\quad \|u\|_F\leqslant\frac{1}{\alpha}\|f\|_{F'},$$

此即表明解对自由项 f 的连续依赖性，这自然保证了解的唯

一性。

4.4 解的正则性

前面讨论的都是弱解，即解 u 的广义导数 u' 仅属 $L^2(0,T;V')$。现在讨论强解，即 u' 属 $L^2(0,T;H)$。

定理3.17 设 V，H和 a 满足定理3.16的条件，并且

$$a(t,u,v)=\overline{a(t,v,u)},\quad \forall u,v\in V,$$
$$a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T]),\quad \forall u,v\in V.$$

令

$$D(A(t))=\{u\in V\,|\,|a(t,u,v)|\leqslant C|v|,\ \forall v\in V,\ C=C(t,u)\text{不依赖于 } v\}$$

$$a(t,u,v)=(A(t)u,v)=(A(t)u,v)_H,\quad \forall v\in V,$$

则对 $f\in H^1(0,T;H)$，$u_0\in D(A(0))$ 存在唯一的 $u\in L^2(0,T;V)$满足 $u'\in L^2(0,T;H)$，$u(t)\in D(A(t))$，$\forall t\in[0,T]$，

$$\begin{cases} u'(t)+A(t)u(t)=f(t), \\ u(0)=u_0. \end{cases}$$

为化成齐次初值问题，先证

引理3.9 设 $a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T])$，$a(t,v,v)\geqslant\alpha\|v\|^2$，$\forall u,v\in V,t\in[0,T]$，$f\in C^1([0,T];H)$，$u(t)\in V$ 是方程

$$a(t,u(t),v)=(f(t),v),\quad \forall v\in V \tag{3.44}$$

的解，则 $u'\in L^\infty(0,T;V)$且

$$a(t,u'(t),v)=(f'(t),v)-a'(t,u(t),v),$$
$$\forall v\in V,\text{a.e.}\ t\in(0,T). \tag{3.45}$$

证明 由 $a(t,u,v)$关于u，v 的有界性和强制性，从 Lax-Milgram 定理知存在唯一的 $u(t)\in V$ 满足(3.44)。现在来估计 $u(t)$的差商。

$$a(t+h,u(t+h),v)-a(t,u(t),v)=(f(t+h),v)-(f(t),v),$$

$$a(t+h,(u(t+h)-u(t))/h,v)+a(t+h,u(t),v)$$
$$-a(t,u(t),v))/h=((f(t+h)-f(t))/h,v). \quad (3.46)$$
由 $a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T])$ 和 $f\in C^1([0,T];H)$ 推出存在与 h 无关的常数 C 使
$$a(t+h,(u(t+h)-u(t))/h,v)\leqslant C\|u(t)\|\|v\|+C\|v\|.$$
在(3.44)中取 $v=u(t)$ 立即得存在与 $t\in[0,T]$ 无关的常数 C 使
$$\alpha\|u(t)\|^2\leqslant C\|u(t)\|, \quad \|u(t)\|\leqslant C.$$
从而
$$a(t+h,(u(t+h)-u(t))/h,v)\leqslant C\|v\|.$$
取 $v=(u(t+h)-u(t))/h$，当 $|h|$ 充分小时，
$$\|(u(t+h)-u(t))/h\|\leqslant C, t\in(0,T).$$
于是由对角线手续可取 $h_n\to+0$，使对任意 $I\subset\subset(0,T)$，当 $n\to\infty$ 时
$$(u(t+h_n)-u(t))/h_n\rightharpoonup\tilde{v}(t), \text{ 在 } L^\infty(I;V) \text{ 弱}^*.$$
显然 $\tilde{v}\in L^\infty(0,T;V)$，并且 $u'=\tilde{v}$。对任意 $w\in V$，在(3.46)中取 $v=\varphi(t)w$，$\varphi\in C_0^\infty(0,T)$，在 $(0,T)$ 上积分，令 $h=h_n$，$n\to\infty$ 得
$$\int_0^T a(t,u'(t),\varphi(t)w)\mathrm{d}t+\int_0^T a'(t,u(t),\varphi(t)w)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^T (f'(t),\varphi(t)w)\mathrm{d}t.$$
由逼近推理，上式对任意 $\varphi\in L^\infty(0,T)$ 皆成立。取 w 为 V 中可数稠密集的元素，取 φ 为区间 (t_0-r,t_0+r) 的特征函数，除以 $2r$，令 $r\to0+$，利用 Lebesgue 定理即知等式 (3.45)成立。▎

现在转回到

定理3.17的证明 跟往常一样，不妨设强制条件中的 $\lambda=0$。由 Lax-Milgram 定理，存在 $g(t)\in V$满足

$$a(t,g(t),v)=a(0,u_0,v)=(A(0)u_0,v),$$
$$\forall v\in V, t\in(0,T).$$

由此即知 $g(t)\in D(A(t))$，并且

$$A(t)g(t)=A(0)u_0.$$

由引理3.9知 $g'\in L^\infty(0,T;V)$。令 $U=u-g$，则问题(3.35)等价于求

$U\in L^2(0,T;V), U'\in L^2(0,T;H)$，$U(t)\in D(A(t)), U(0)=0$

满足方程

$$A(t)U(t)+U'(t)=f(t)-A(t)g(t)-g'(t)$$
$$=\tilde{f}(t)\in L^2(0,T;H).$$

延拓 a，f 到$[0,\infty)$，使在$[0,T]$上的性质仍旧保持。取$\gamma>0$充分大使

$$2\gamma a(t,v,v)-a'(t,v,v)\geqslant\alpha'\|v\|^2,\quad \forall v\in V. \quad (3.47)$$

引入下列加权空间

$$F=\{e^{-\gamma t}U\in L^2(0,\infty;V)\mid e^{-\gamma t}U'\in L^2(0,\infty,H), U(0)=0\},$$
$$\Phi=\{\varphi\in F\mid \varphi' e^{-\gamma t}\in L^2(0,T;U)\},$$
$$\|U\|_F^2=\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\|U(t)\|^2dt+\int_0^\infty e^{-2\gamma t}|U'(t)|^2dt,$$
$$\|\varphi\|_\Phi=\|\varphi\|_F.$$

再引入加权共轭双线性型和共轭线性泛函

$$E(U,\varphi)=\int_0^\infty [a(t,e^{-\gamma t}U(t),e^{-\gamma t}\varphi'(t))$$
$$+(e^{-\gamma t}U'(t),e^{\gamma t}\varphi'(t)]dt,$$
$$L(\varphi)=\int_0^\infty (e^{-\gamma t}f(t),e^{-\gamma t}\varphi'(t))dt.$$

我们来验证E在Φ上的强制性，由分部积分和(3.47)

$$2\mathrm{Re}\int_0^\infty [\mathrm{e}^{-2\gamma t}a(t,\varphi(t),\varphi'(t))+\mathrm{e}^{-2\gamma t}|\varphi'(t)|^2]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t,\varphi(t),\varphi(t))-a'(t,\varphi(t),\varphi(t)\right]$$

$$+2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}|\varphi'(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}[2\gamma a(t,\varphi(t),\varphi(t))-a'(t,\varphi(t),\varphi(t))]\mathrm{d}t$$

$$+2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}|\varphi'(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\alpha'\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}\|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t+2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}|\varphi'(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\geqslant\delta\|\varphi\|_\Phi^2,$$

$$\delta=\min(\alpha',2).$$

由 Lions 定理，存在 $U\in F$ 使

$$E(U,\varphi)=L(\varphi),\quad \forall\varphi\in\Phi.$$

对任意 $\psi\in C_0^\infty(0,T),v\in \mathrm{V}$，在上式中令

$$\varphi(t)=\int_0^t \psi(s)\mathrm{d}sv.$$

我们得

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}[a(t,U(t),v)+(U'(t),v)-(f(t),v)]\psi(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此推知

$$a(t,U(t),v)+(U'(t),v)=(f(t),v).$$

于是 $U(t)\in D(A(t))$，定理得证。 ▎

例 $\mathrm{V}=H_0^1(\Omega),H=L^2(\Omega),\partial\Omega\in C^2$，取双线性型

$$a(t,u,v)=\int_\Omega(a_{ij}(x,t)D_iuD_j\bar{v}+b_i(D_iu)\bar{v}+cu\bar{v})\mathrm{d}x,$$

其中系数满足条件

$$a_{ij},b_i,c\in C^1(\bar{Q}),\ \bar{a}_{ij}=a_{ji},\ b_i=-\bar{b}_i,\ c-\bar{c}=-D_ib_i.$$

在上述条件下，$a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T])$，并且

$$a(t,u,v)=\overline{a(t,v,w)}.$$

设 $f\in H^1(0,T;L^2(\Omega))$，$u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$，由定理 3.17存在 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，满足

$$u'\in L^2(0,T;L^2(\Omega))=L^2(Q),$$

$$(u'(t),v)+a(t,u(t),v)=(f(t),v),$$

$$\forall v\in H_0^1(\Omega),u(0)=u_0.$$

$$a(t,u(t),v)=(f(t)-u'(t),v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

由椭圆型方程解的正则性定理，$u(t)\in H^2(\Omega)$，并且

$$\|u(t)\|_{2,\Omega}\leqslant\|f(t)-u'(t)\|_0\in L^2(0,T).$$

于是 $u\in H^{2,1}(Q)$。由逼近推理，当 $f\in L^2(Q)$，$u_0\in H_0^1(\Omega)$时结论亦成立(见下节相应定理的证明)。

§5 算子的连续半群和抛物型方程解的正则性

从前节我们确信，Lions 定理对处理抛物型方程弱解的存在性应付裕如。虽然亦可用它讨论解的正则性，但是稍嫌勉强。本节我们介绍半群方法，它把抛物型方程解的正则性完全归结为椭圆型方程解的正则性。半群方法是目前处理发展方程的标准方法，并且是本章当之无愧的重点。

5.1 连续半群概要

我们考虑区间$[0,\infty)$上数值函数一阶线性常微分方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}+Au=f,\\ u(0)=u_0.\end{cases}$$

其中A为常数，它相当$R^1\to R^1$的一个连续线性算子。为求这个非齐次方程的解，先解相应齐次方程

$$\frac{du}{dt}+Au=0.$$

其解为$u=Ce^{-At}$。再用常数变易法得原来Cauchy问题的解为

$$u(t)=e^{-At}u_0+\int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds.$$

我们看到通过函数e^{-At}就用自由项f和初值u_0把解表达出来。

如果u是在Banach空间B中取值的抽象函数，A自然是B到自身的一个线性算子，e^{-At}是$t\mapsto\mathscr{L}(B)$的函数。但通常A并非有界线性算子。例如Laplace算子$-\Delta$考虑为$B=L^2(\Omega)$到自身的线性算子，其定义域为$H^2(\Omega)$，它显然是无界的。对无界算子A，我们无法定义e^{-At}。但我们并不就此止步不前，而要耐心考虑一下有无别的途径定义e^{-At}。我们回想起来，在数学分析中，可用公理方法定义

$$T(t)=e^{-At}:$$

1) $T(t+s)=T(t)T(s)$,

2) $T(0)=1$,

3) $\lim\limits_{t\to 0}e^{-At}=1$.

知道了$T(t)$，可通过$\lim\limits_{t\to 0}(T(t)-T(0))/t=-A$求出$A$来。

在线性算子的情形，我们定义具有类似性质的所谓连续半群$T(t)$，再来考察一个算子具备什么条件能够从某一半群T经过对t在$t=0$求导得到，最后通过半群$T(t)$表达Cauchy问题的解。

定义3.17 设B是一个Banach空间，$\mathscr{L}(B)$是B到自身的有界线性算子组成的Banach代数，从$[0,\infty)$到$\mathscr{L}(B)$的映射$t\mapsto T(t)$称为一个(算子的连续)半群，若它具有下列三个性质

1) $T(s)T(t)=T(s+t)$, $\forall s,t\geqslant 0$,

2) $T(0)=I=B$上的恒等映射，

3) $\forall b$, $\|T(t)b-T(t_0)b\|\to 0$ $(t\to t_0)$.

实际上定义中的3)可用下列条件代替

$$\forall b, \|T(t)b-b\|\to D \quad (t\to +0).$$

请读者证明。

例1 $B=L^2(0,\infty)$, $T(t)u(s)=u(t+s)$, 这是$L^2(0,+\infty)$的右移算子。由$L^2(0,\infty)$中平移的连续性，显然$T(t)$在每点$u\in L^2(0,\infty)$连续。

例2 设B是一Banach空间，$A\in\mathscr{L}(B)$，定义

$$e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots.$$

由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n/n!$收敛，故上述级数在$\mathscr{L}(B)$中收敛。

设$A_1,A_2\in\mathscr{L}(B)$，$A_1A_2=A_2A_1$，则

$$e^{A_1}e^{A_2}=e^{A_1+A_2}\text{(留作习题)}.$$

定义$T(t)=e^{-At}$，容易验证$T(t)$是一个连续半群。

定义3.18 设$T(t)$是B上的半群，定义

$$D(A)=\{b\in B|\lim_{h\to 0+}(b-T(h)b)/h\text{ 存在}\},$$

$$Ab=\lim_{h\to 0+}(b-T(h)b)/h.$$

A称为T的(无穷小)生成元。

例3 $B=L^2(-\infty,\infty)$，T是B上的平移半群，

$$D(A)=H^1(-\infty,\infty),\ -Au=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

例 4 B 是任一 Banach 空间，$T(t)=\mathrm{e}^{-\tilde{A}t}$，这里 $\tilde{A}\in\mathscr{L}(B)$，则 $D(A)=B, Ab=\tilde{A}b$。

引理3.10 设 $T(t)$ 是 B 上的连续半群，则存在常数 $M,\beta>0$ 使

$$\|T(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\beta t},\quad t\geqslant 0. \tag{3.48}$$

证明 考虑有界线性算子族 $\{T(t)\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$，对每一 $b\in B$，由于 $T(t)b$ 从 $[0,1]\to B$ 连续，从而 $\|T(t)b\|\in C^0([0,1];\boldsymbol{R}^1)$，故 $\|T(t)b\|$ 对 t 在 $[0,1]$ 上有界。由共鸣定理，$\|T(t)\|$ 在 $[0,1]$ 有界，设 M 是界。由于 $\|T(0)\|=\|I\|=1$，故 $M\geqslant 1$。给定任一正数 t，由半群性质 1)，

$$\begin{aligned}\|T(t)\|&=\|T(t-[t])T([t])\|\leqslant\|T(t-[t])\|\|T([t])\|\\&\leqslant M\|T(1)\|^{[t]}\leqslant M^{[t]+1}\\&=M\mathrm{e}^{(\ln M)[t]}\leqslant M^{\beta t},\quad \beta=\ln M.\ \blacksquare\end{aligned}$$

由这个引理，当 $p>\beta$ 时可以定义

$$R(p)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}T(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.49}$$

这个积分按范数在 $\mathscr{L}(B)$ 中收敛，且 $R(p)\in\mathscr{L}(B)$。

引理3.11 设 $p>\beta$，则 $R(p)$ 的值域含于 $D(A)$，且在 B 上，

$$(pI+A)R(p)=I;$$

在 $D(A)$ 上，

$$R(p)(pI+A)=I.$$

证明 任取 $b\in B$，$h\neq 0$，我们有

$$h^{-1}(T(h)-I)R(p)b=h^{-1}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}(T(t+h)-T(t))b\,\mathrm{d}t$$

$$= h^{-1}\left(\int_h^{\infty} e^{-p(t-h)}T(t)b\,dt - \int_0^{\infty} e^{-pt}T(t)b\,dt\right)$$

$$= h^{-1}(e^{ph}-1)\int_h^{\infty} e^{-pt}T(t)b\,dt - h^{-1}\int_0^h e^{-pt}T(t)b\,dt$$

$$\to pR(p)b - b \quad (h\to 0).$$

故 $R(p)b\in D(A)$，且

$$-AR(p)b = pR(p)b - b, (pI+A)R(p)b = b.$$

第二个等式可类似地证明。 ▌

定义3.19 $R(p)=(pI+A)^{-1}$称为A的预解式。

引理3.12 对任意 $b\in B$,

$$pR(p)b = \left(I+\frac{A}{p}\right)^{-1}b\to b \quad (p\to +\infty).$$

证明 $pR(p)b - b = p\int_0^{\infty} e^{-pt}(T(t)b-b)\,dt,$

$$\|pR(p)b-b\| \leqslant p\int_0^{\infty} e^{-pt}\|T(t)b-b\|dt$$

$$\leqslant p\int_0^{\delta} e^{-pt}\|T(t)b-b\|dt$$

$$+ p\int_{\delta}^{\infty} e^{-pt}(Me^{\beta t}+1)\|b\|dt.$$

$\forall\ \varepsilon>0$，取 $\delta>0$充分小，使 $0\leqslant t\leqslant\delta$ 时 $\|T(t)b-b\|<\varepsilon$，则

$$p\int_0^{\delta} e^{-pt}\|T(t)b-b\|dt<\varepsilon p\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=\varepsilon,$$

$$p\int_{\delta}^{\infty} e^{-pt}(Me^{\beta t}+1)dt\|b\| \leqslant 2pM\int_{\delta}^{\infty} e^{-(p-\beta)t}dt$$

$$=\frac{2Mp}{p-\beta}e^{-(p-\beta)\delta}<\varepsilon, \quad p>P. \quad ▌$$

由于 $R(p)b\in D(A)$，由这个引理立即得到

推论3.5 $D(A)$在B中稠密。

定义3.20 以$D(A)$为定义域的一个算子称为闭的，若对任意序列 $b_n\in D(A), b_n\to b, Ab_n\to c$，有 $b\in D(A)$，并且 $Ab=c$。

有界线性算子显然是闭的，又闭算子的逆算子(如果存在)显然是闭的，我们得到

推论3.6 半群的无穷小生成元是闭算子。

定理3.18(Hille-Yosida) 设A是 Banach 空间 B 中带稠密定义域 $D(A)$的线性算子，存在 $p_0>0$，使对所有整数 $p>p_0$，$-A$ 的预解算子 $R(p,-A)=(pI+A)^{-1}$ 存在且是B到自身内的有界线性算子，则下述两条件等价

1) $-A$ 是某个连续半群 $T(t)$的无穷小生成元，

2) 存在常数 $M,\beta\geqslant 0$ 使对所有 $k=1,2,\cdots$ 和整数 $m>\max(p_0,\beta)$有

$$\left\|\left(I+\frac{1}{m}A\right)^{-k}\right\|\leqslant M\left(1-\frac{\beta}{m}\right)^{-k}. \qquad (3.50)$$

证明 1)⇒2)。设$-A$是某个连续半群T的无穷小生成元，由引理3.11，存在$\beta>0$，当$p>\beta$时，$-A$的预解算子 $R(p)=(pI+A)^{-1}$存在且有表达式(3.49)。在积分号下对p求微商，

$$R^{(k)}(p)=\int_0^\infty(-t)^k e^{-pt}T(t)\,dt.$$

另一方面，由 $R(p)=(pI+A)^{-1}$ 容易验证

$$R^{(k)}(p)=(-1)^k k!\,R(p)^{k+1}.$$

于是

$$\|R(p)^{k+1}\|=\frac{\|R^{(k)}(p)\|}{k!}\leqslant M\int_0^\infty\frac{t^k}{k!}e^{-(p-\beta)t}\,dt$$

$$= M(p-\beta)^{-(k+1)}\int_0^\infty \frac{t^k}{k!}e^{-t}dt$$

$$= M\frac{(p-\beta)^{-(k+1)}}{k!}\Gamma(k+1) = M(p-\beta)^{-(k+1)},$$

由此即得(3.50)。

2)⇒1)。设(3.50)满足，则可从预解算子

$$J_m = \left(I + \frac{1}{m}A\right)^{-1}$$

出发构选T，m是大于p_0的整数。在(3.50)中取$k=1$即知当$m>\max(p_0,\beta)$时，J_m组成$\mathscr{L}(B)$中的一个有界集，即存在与m无关的常数C使$\|J_m\|\leqslant C$。我们先证明

$$\forall b\in B, J_m b\to b \quad (m\to\infty)。\tag{3.51}$$

若$b\in D(A)$，则

$$b - J_m b = J_m\left(I+\frac{A}{m}\right)b - J_m b = m^{-1}J_m Ab,$$

$$\|b-J_m b\|\leqslant m^{-1}\|J_m\|\|Ab\|\leqslant m^{-1}C\|Ab\|\to 0 \ (m\to\infty)。$$

即(3.51)对$b\in D(A)$成立。由$D(A)$在B中的稠密性和J_m范数的有界性推知(3.51)对任意$b\in B$成立。

考虑算子序列

$$\begin{aligned} T_m(t) &= \exp(-tAJ_m) = \exp(mt(J_m - I)) \\ &= e^{-mt}\exp(mtJ_m), t\geqslant 0。\end{aligned}$$

对任意固定的m,t，$T_m(t)$是有界线性算子。今证对任意$b\in B$，极限$\lim\limits_{m\to\infty}T_m(t)b$存在。为此估计范数$\|T_m(t)\|$。由条件(3.50)，

$$\|\exp(mtJ_m)\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mt)^k}{k!}\|J_m^k\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mt)^k}{k!} M\left(1-\frac{\beta}{m}\right)^{-k}$$

$$= M\exp\left(m\left(1-\frac{\beta}{m}\right)^{-1}t\right).$$

注意到 $m(1-\beta/m)^{-1}-m=(m/(m-\beta))\beta$，我们得

$$\|T_m(t)\| \leqslant M\exp((1-\beta/m)^{-1}\beta t)$$

$$\leqslant M\exp(2\beta t),\ m>\max(p_0,2\beta). \tag{3.52}$$

这表明在 t 的任意有穷区间上，$\|T_m(t)\|$ 关于 m 和 t 有界。

设 $b\in D(A)$，易知 $AJ_mb=J_mAb$。我们有

$$T_m(t)b-T_n(t)b=e^{-tAJ_m}b-e^{-tAJ_n}b$$

$$=(e^{-tA(J_m-J_n)}-I)e^{-tAJ_n}b.$$

由 Newton-Leibniz 公式

$$T_m(t)b-T_n(t)b=-\int_0^t e^{-sA(J_m-J_n)}A(J_m-J_n)ds\,e^{-tAJ_n}b$$

$$=-\int_0^t T_m(s)T_n(t-s)(J_m-J_n)Ab\,ds.$$

由(3.52)得

$$\|T_m(t)b-T_n(t)b\| \leqslant \int_0^t \|T_m(s)\|\|T_n(t-s)\|ds\|(J_m-J_n)Ab\|$$

$$\leqslant M^2\int_0^t e^{2\beta t}ds\|(J_m-J_n)Ab\|.$$

再由(3.51)即知

$$\|T_m(t)b-T_n(t)b\|\to 0\quad (m,n\to\infty). \tag{3.53}$$

由 $D(A)$ 在 B 中的稠密性和 $\|T_m(t)\|$ 对 m 和 t (在有穷区间)的一致有界性，对任意 $b\in B$,(3.53)皆成立。于是对任意

b，$\lim\limits_{m\to\infty} T_m(t)b$ 存在，记为 $T(t)b$。由于 $T_m(t)b\to T(t)b$ $(m\to\infty)$在任意有穷区间上一致，又 $T_m(t)b$是 t 的B值连续函数，故 $T(t)b$亦是 t 的 B 值连续函数。由 $T_m(s+t)=T_m(s)T_m(t)$ 知$T(s+t)=T(s)T(t)$。由$T_m(0)=I$知$T(0)=I$。$T(t)$是连续半群，且由(3.52)知有估计

$$\|T(t)\|\leqslant Me^{\beta t},\ \forall t\geqslant 0. \qquad (3.54)$$

最后证明 $-A$ 恰好是 $T(t)$的生成元。设 $T(t)$ 的生成元为 $-A'$，由估计式(3.54)，根据引理 3.11，当 $p>\beta$ 时，预解算子

$$\begin{aligned}R(p)=R(p,-A')&=\int_0^\infty e^{-pt}T(t)\mathrm{d}t\\&=\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty e^{-pt}\exp(-tAJ_m)\mathrm{d}t\\&=\lim_{m\to\infty}(pI+AJ_m)^{-1}\\&=(pI+A)^{-1}=R(p,-A).\end{aligned}$$

实际上，设

$$(pI+AJ_m)^{-1}a=b_m\to b\quad (m\to\infty),$$

则

$$a=pb_m+AJ_mb_m.$$

由$\|J_m\|\leqslant C$ 和(3.51)得

$$J_mb_m\to b\ (m\to\infty),\quad AJ_mb_m=a-pb_m\to a-pb\quad (m\to\infty).$$

又 A 是闭算子，故 $b\in D(A)$，且$Ab=a-pb$，即$b=(pI+A)^{-1}a$。由$(pI+A')^{-1}=(pI+A)^{-1}$，推知 $A'=A$。 ▌

5.2 用半群解发展方程的 Cauchy 问题

定理3.19 设B是一个 Banach 空间，$T(t)$ 是 B 上的一个连续半群，$-A$ 为T 的无穷小生成元，$f\in C^1([0,T];B)$，

$u_0\in D(A)$，则由公式

$$u(t)=T(t)u_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \tag{3.55}$$

提供的函数 $u\in C^1([0,T];\ B)$，满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+Au(t)=f(t),\\ u(0)=u_0.\end{cases} \tag{3.56}$$

证明　由于 $u_0\in D(A)$，并且 $T(t)Au_0=AT(t)u_0$ 我们有 $T(t)u_0\in D(A)$，且

$$\begin{aligned}&(T(t+h)u_0-T(t)u_0)/h=T(t)((T(h)u_0-u_0)/h)\\&\quad\to -T(t)Au_0=-AT(t)u_0\quad(h\to 0+).\end{aligned}$$

类似地注意到$\|T(t)\|$在有穷区间的有界性可证

$$\begin{aligned}&(T(t-h)u_0-T(t)u_0)/(-h)=T(t-h)((T(h)u_0-u_0)/h)\\&\quad\to -AT(t)u_0\quad(h\to +0).\end{aligned}$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}=-Au_1(t)$，这里 $u_1(t)=T(t)u_0$，即 u_1 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1(t)}{\mathrm{d}t}+Au_1(t)=0,\\ u_1(0)=u_0.\end{cases}$$

令

$$u_2(t)=\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s.$$

我们有

$$\begin{aligned}&\frac{u_2(t+h)-u_2(t)}{h}\\&=\frac{1}{h}\int_0^{t+h}T(t+h-s)f(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h}\int_{-h}^{t} T(t-s)f(s+h)\mathrm{d}s - \frac{1}{h}\int_{0}^{t} T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$= \int_{0}^{t} T(t-s)\,\frac{f(s+h)-f(s)}{h}\mathrm{d}s$$

$$+\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} T(s)f(t+h-s)\mathrm{d}s.$$

由抽象函数的 Newton–Leibniz 公式

$$\|(f(s+h)-f(s))/h\| = \|h^{-1}\int_{s}^{s+h} f'(\tau)\mathrm{d}\tau\|$$

$$\leqslant \max_{[0,T]}\|f'(\tau)\|.$$

又由引理3.10，

$$\|T(t-s)\| \leqslant M\mathrm{e}^{\beta(t-s)} \leqslant C, \qquad s \in (0,t).$$

由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\left\|\int_{0}^{t} T(t-s)(f(s+h)-f(s))/h\mathrm{d}s - \int_{0}^{t} T(t-s)f'(s)\mathrm{d}s\right\|$$

$$\leqslant \int_{0}^{t} \|T(t-s)\|\|(f(s+h)-f(s))h - f'(s)\|\mathrm{d}s$$

$$\to 0 \quad (h \to 0).$$

同理可证

$$\frac{1}{h}\int_{t}^{t+h} T(s)f(t+h-s)\mathrm{d}s \to T(t)f(0) \quad (h \to 0)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{0}^{t} T(t-s)f'(s)\mathrm{d}s + T(t)f(0)$$

存在，且属于 $C^0([0,T];\ B)$。

为证 $u_2\in D(A)$，我们改写差商

$$\frac{u_2(t+h)-u_2(t)}{h}=\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

$$+h^{-1}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

由 f 的连续性易知

$$h^{-1}\int_t^{t+h}T(t+h-s)f(s)\,\mathrm{d}s\to f(t)\quad(h\to 0).$$

既然已知 $u_2'(t)$ 存在，故

$$\lim_{h\to 0}(T(h)-I)/h\int_0^T T(t-s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

存在，这说明 $u_2(t)\in D(A)$，并且

$$u_2'(t)=-Au_2(t)+f(t).$$

故 $u_2\in D(A)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t}+Au_2(t)=f(t),\\ u_2(0)=0.\end{cases}$$

由关于 u_1 和 u_2 所得的结论推知 $u\in C^1([0,T];B)$ 且满足 (3.56)。 ▎

5.3 抛物型方程解的正则性(系数不依赖于 t 的情形)

定理3.20 设 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ 是 $\partial\Omega\in C^2$ 的有界区域，微分算子

$$A=-D_j(a_{ij}(x)D_i)+b_i(x)D_iu+c(x)$$

的系数满足光滑条件和一致强椭圆条件

$$a_{ij}\in C^{0,1}(\bar{\Omega}),\quad b_i,c\in L^\infty(\Omega),$$

$$\operatorname{Re}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\quad x\in\Omega,\quad \xi\in\boldsymbol{R}^n.$$

∂u

这里 (,) 是 $L^2(\Omega)$ 中的内积。于是逆算子$(\lambda+A)^{-1}$存在且有估计

$$\|(\lambda+A)^{-1}\|\leqslant(\lambda-\lambda_0)^{-1},$$

$$\left\|\left(I+\frac{A}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leqslant\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{-1},\quad \lambda>\lambda_0.$$

递推得

$$\left\|\left(I+\frac{A}{\lambda}\right)^{-k}\right\|\leqslant\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{-k},\quad \lambda>\lambda_0.$$

由 Hille-Yosida 定理，$-A$ 是 $L^2(\Omega)$上某连续半群 $T(t)$ 的无穷小生成元，再由定理3.19，存在 $u\in C^1([0,T];L^2(\Omega))$，$u(t)\in D(A)$满足(3.56)。若记 $u(t)(x)=u(x,t)$，显然弱导数$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$在 Q 上存在并且满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)-D_j(a_{ij}D_iu(x,t))+b_iD_iu(x,t)+cu(x,t)\\ \quad =f(x,t), & Q\text{上}, \quad (3.57)\\ u(x,t)=0, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=u_0(x), & \Omega\text{内}.\end{cases}$$

定理证毕。▍

采用逼近推理，可以降低对 f 和 u_0 的要求。

定理3.21 设定理 3.20 中关于算子A的系数的条件满足，相应双线性型 a 满足

$$\overline{a(u,v)}=a(v,u),\quad f\in L^2(Q),\quad u_0\in H_0^1(\Omega),$$

则存在$u\in H^{2,1}(Q)$满足(3.57)；且有估计

$$\|u\|_{H^{2,1}(Q)}\leqslant C(\|f\|_{0,Q}+\|u_0\|_{1,\Omega}). \qquad (3.58)$$

证明 取 $f_n\in C^1([0,T];L^2(\Omega))$和 $u_{0n}\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$

分别满足

$$\|f_n - f\|_{0,Q} \to 0, \quad \|u_{0n} - u_0\|_{1,\Omega} \to 0, \quad n \to \infty.$$

由定理 3.20，存在 $u_n \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$，$u_n(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$满足

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t) + Au_n(t) = f_n(t), \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases} \tag{3.59}$$

不失一般性可设

$$a(v,v) \geqslant \alpha \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(3.59) 两端与 $u_n(t)$在 $L^2(\Omega)$上做内积并在$(0,t)$上积分，

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_0^2 - \frac{1}{2}\|u_{0n}\|^2 + \int_0^t a(u_n,u_n)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^t (f_n(t),u_n(t))\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_0^2 + \alpha\int_0^t \|u_n(t)\|_1^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f_n(t)\|_0^2 \mathrm{d}t + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u(t)\|_1^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|u_{0n}\|_0^2.$$

由此得

$$\|u_n(t)\|_0^2 + \int_0^T \|u_n(t)\|_1^2 \mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\left(\|u_{0n}\|_0^2 + \int_0^T \|f_n(t)\|_0^2 \mathrm{d}t\right).$$

(3.59)两端与$\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$在 $L^2(\Omega)$中作内积，并在$(0,t)$上积分

$$\int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_0^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}a(u_n(t),u_n(t)) - \frac{1}{2}a(u_{0n},u_{0n})$$

$$= \int_0^t \left(f_n(t), \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \|f_n(t)\|_0^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_0^2 \mathrm{d}t,$$

利用 a 在 $H_0^1(\Omega)$ 上的强制性和有界性得

$$\int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}(t)\right\|_0^2 \mathrm{d}t + \|u_n(t)\|_1^2$$

$$\leqslant C\left(\int_0^T \|f_n(t)\|_0^2 \mathrm{d}t + \|u_{0n}\|_1^2\right).$$

由上述估计，可抽出子列，仍记为 u_n，满足：$n\to\infty$时

$$u_n \rightharpoonup u, \ 在 L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))中弱星,$$

$$\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} \rightharpoonup \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \ 在 L^2(Q)中弱.$$

u 满足方程(3.56)，由椭圆型方程解的正则性

$$\|u\|_{L^2(0,T;\ H^2(\Omega))} \leqslant C\left(\|f\|_{L^2(0,T;\ L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right\|_{L^2(0,T;\ L^2(\Omega))}\right)$$

$$\leqslant C\left(\|f\|_{L^2(0,T;\ L^2(\Omega))} + \|u_0\|_1\right).$$

从而估计(3.58)成立。▎

5.4 抛物型方程解的正则性(系数依赖t的情形)

本段仍设 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 是 C^2 有界区域，算子系数依赖于 t，

$$A(t) = -D_j(a_{ij}(x,t)D_i) + b_i(x,t)D_i + c(x,t),$$

$$a(t,u,v) = \int_\Omega (a_{ij}(x,t)D_iuD_j\bar{v} + b_i(x,t)(D_iu)\bar{v}$$

$$+ c(x,t)u\bar{v})\mathrm{d}x,$$

其中系数满足条件

$$\begin{cases} a_{ij}\in C^{0,1}(\bar{Q}), \quad b_i, c\in L^\infty(Q), \\ |D_K a_{ij}(x,t_1)-D_k a_{ij}(x,t_2)| \\ \quad \leqslant c|t_1-t_2|, |b_i(x,t_1)-b_i(x,t_2)| \\ \quad \leqslant c|t_1-t_2|, |c(x,t_1)-c(x,t_2)|\leqslant c|t_1-t_2|, \\ \forall i,j,k=1,\cdots,n, \quad x\in\Omega, \quad t_1,t_2\in(0,T). \end{cases} \tag{3.60}$$

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2, \qquad (x,t)\in\bar{Q}, \ \xi\in \mathbf{R}^n, \tag{3.61}$$

$$a_{ij}(x,t)=\overline{a_{ji}(x,t)}.$$

定理3.22 在条件(3.60)—(3.62)之下，对 $f\in L^2(Q)$ 和 $u_0\in H_0^1(\Omega)$ 存在唯一的 $u\in C([0,T]; H_0^1(\Omega))\cap H^{2,1}(Q)$ 满足(3.57)和估计(3.58)。

证明 取 $\Delta t>0$，其值待定. 记 $Q_{\Delta t}=\Omega\times(0,\Delta t)$, $\Sigma_{\Delta t}=\partial\Omega\times(0,\Delta t)$，定义空间

$$K_{\Delta t}=L^2(Q_{\Delta t})\times H_0^1(\Omega)$$

和算子

$$R:\ u\mapsto(A(t)u+u',\ u(x,0)),$$
$$R_0:\ u\mapsto(A(0)u+u',\ u(x,0)).$$

显然

$$R,R_0\in\mathscr{L}(H^{2,1}(Q_{\Delta t}),K_{\Delta t}).$$

我们要证算子 R 是满射，即对任意 $(f,u_0)\in K_{\Delta t}$，存在

$$u\in H^{2,1}(Q_{\Delta t})\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

满足方程

$$Ru=(f,u_0). \tag{3.63}$$

与 R_0 相应的 $A(0)$ 不依赖于 t，由定理3.21，R_0 是 $H^{2,1}(Q_{\Delta t})\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 到 $K_{\Delta t}$ 的一个映射，满足

$$\|R_0^{-1}\|_{\mathscr{L}(K_{\Delta t},H^{2,1}(Q_{\Delta t}))}\leqslant C. \tag{3.64}$$

注意这里仅假设了主系数共轭对称，而不是双线性型 a 共轭

对称，不过类似地可证定理3.21仍成立。

利用算子 R_0 可把（3.63）改写为

$$[I+R_0^{-1}(R-R_0)]u=R_0^{-1}(f,u_0). \qquad (3.65)$$

算子 $S=R_0^{-1}(R-R_0)\in\mathscr{L}(H^{2,1}(Q_{\Delta t}))$，若有 $\|S\|<1$，则逆 $(I+S)^{-1}$ 存在。我们可选 Δt 充分小以使 $\|S\|<1$。实际上由（3.64）

$$\|S\|\leqslant\|R_0^{-1}\|_{\mathscr{L}(K_{\Delta t},H^{2,1}(Q_{\Delta t}))}\|R-R_0\|_{\mathscr{L}(H^{2,1}(Q_{\Delta t}),K_{\Delta t})}$$
$$\leqslant C\|R-R_0\|_{\mathscr{L}(H^{2,1}(Q_{\Delta t}),K_{\Delta t})}.$$

对任意 $u\in H^{2,1}(Q_{\Delta t})$，由所假定的系数的光滑性

$$\begin{aligned}\|(R-R_0)u\|_{K_{\Delta t}}&=\|(A(t)-A(0))u\|_{0,Q_{\Delta t}}\\&=\|D_j(a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x,0))D_iu)+(b_i(x,t)\\&\quad-b_i(x,0))D_iu+(C(x,t)-C(x,0))u\|_{0,Q_{\Delta t}}\\&\leqslant\|D_j(a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x,0))D_iu\|_{0,Q_{\Delta t}}\\&\quad+\|(a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x,0))D_jD_iu)|_{0,Q_{\Delta t}}\\&\quad+C\Delta t\|u\|_{1,Q_{\Delta t}}+C\Delta t\|u\|_{0,Q_{\Delta t}}\\&\leqslant C\Delta t\|u\|_{2,1,Q_{\Delta t}}.\end{aligned}$$

于是

$$\|S\|_{\mathscr{L}(H^{2,1}(Q_{\Delta t}))}\leqslant C\Delta t.$$

注意 C 与 Δt 无关，并且若区间 $(0,\Delta t)$ 换为 $(t_0,t_0+\Delta t)$，C 也与 t_0 无关。取定 $\Delta t>0$，使 $C\Delta t<1$，将有 $\|S\|<1$，这时（3.65）可解，记其解为 u^1。再解问题

$$\begin{cases}\dfrac{du^2}{dt}+Au^2=f,\\u^2(x,\Delta t)=u^1(x,\Delta t),\end{cases}$$

注意由 $u^1\in H^{2,1}(Q_{\Delta t})$，易知 $u^1\in C^0([0,\Delta t];H_0^1(\Omega))$ （试证之）．经有限步后可达到 $t=T$，令

$$u(t)=u^i(t),\quad 当(i-1)\Delta t\leqslant t\leqslant i\Delta t,\quad i=1,2,\cdots,$$

可知 $u\in H^{2,1}(Q)\cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$，且有估计(3.58)．▌

进一步降低对 f 和 u_0 的要求，可达到由 Lions定理导出的类似结论．

定理3.23 设定理3.22的关于系数的条件成立，$\partial\Omega\in C^2$，$f\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$，$u_0\in L^2(\Omega)$，则存在唯一的 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$满足

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^T[-(u,\varphi')+a(u,\varphi)-(f,\varphi)]\mathrm{d}t=0,\\ \qquad\forall\varphi\in C_0^\infty((0,T);H_0^1(\Omega)),\\ u(0)=u_0.\end{cases}\tag{3.66}$$

证明 仍采用逼近推理．取 $f_n\in L^2(Q)$和 $u_{0n}\in H_0^1(\Omega)$满足

$$\|f_n-f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\to 0,\quad \|u_{0n}-u_0\|_{0,\Omega}\to 0\quad(n\to\infty).$$

由定理3.22，存在 $u_n\in H^{2,1}(Q)\cap C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}+Au_n=f_n,\\ u_n(0)=u_{0n}.\end{cases}\tag{3.67}$$

方程两端与 $u_n(t)$作内积(在 $L^2(\Omega)$上)，并在$(0,t)$上积分，

$$\|u_n(t)\|_0^2-\|u_{0n}\|_0^2+\int_0^t a(t,u_n,u_n)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^t(f_n(t),u_n(t))\mathrm{d}t.$$

由 Gårding 不等式不失一般性可设

$$a(t,v,v)\geqslant\alpha\|v\|_1^2,\qquad\forall v\in H_0^1(\Omega),$$

于是有

$$\|u_n(t)\|_0^2+a\int_0^t\|u_n(t)\|_1^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{2a}\int_0^t\|f_n\|_{-1}^2\,\mathrm{d}t+\frac{a}{2}\int_0^t\|u_n\|_1^2\mathrm{d}t+\|u_{0n}\|_0^2,$$

这里$\|f_n\|_{-1}=\|f_n\|_{H^{-1}(\Omega)}$。由此

$$\|u_n(t)\|_0^2+\int_0^T\|u_n(t)\|_1^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant C\left(\int_0^T\|f_n\|_{-1}^2\mathrm{d}t+\|u_{0n}\|^2\right)\leqslant C_1,$$

C_1是与n无关的 常数。对u_{n-m}用这一估计给出

$$\|u_n(t)-u_m(t)\|$$

$$\leqslant C(\|f_n-f_m\|_{L^2(0,T;\,H^{-1}(\Omega))}+\|u_{0m}-u_{0n}\|)\to 0,$$

$$n,m\to\infty,$$

又$u_n(t)\in C([0,T];\ L^2(\Omega))$，故存在

$$u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

满足$n\to\infty$时，$u_n(t)\to u(t)$，在$L^2(\Omega)$中一致(关于$t\in[0,T]$)，$n\to\infty$时，$u_n(t)\to u(t)$，在$L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$。方程(3.67)乘以$\varphi\in C_0^\infty((0,T);\ H_0^1(\Omega))$，在$Q$上积分，

$$\int_0^T[-(u_n,\varphi')+a(u_n,\varphi)-(f_n,\varphi)]\mathrm{d}t,$$

令$n\to\infty$取极限得 (3.66) . ▎

对于非齐次边值我们有

推论3.7 在定理3.22的条件之下，又设$g\in H^{3/2,3/4}(\Sigma)$，$u_0\in H^1(\Omega)$，满足相容条件

$$u_0(x)=g(x,0),\quad x\in\partial\Omega,\tag{3.68}$$

则存在唯一的$u\in H^{2,1}(Q)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{内},\\ u=g, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=u_0(x), & \Omega\text{内}.\end{cases}$$

证明 由关于 g 和 u_0 的条件，根据各向异性空间的迹定理3.11知存在 $w\in H^{2,1}(Q)$ 满足

$$w(x,t)=g(x,t),\quad x\in\partial\Omega, t\in(0,T)\text{（在 }\partial\Omega\text{ 上迹的意义下）}$$

$$w(x,0)=u_0(x).$$

又由定理3.22，存在 $v\in H^{2,1}(Q)\cap C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}+Av=f-\dfrac{\partial w}{\partial t}-Aw, & Q\text{上},\\ v(x,0)=0, & x\in\Omega.\end{cases}$$

则 $u=v+w$ 即为所求。∎

我们清楚看到，半群方法离不开相应椭圆型方程解的正则性结果，并且对系数和边界的要求比 Lions 定理应用时较高。但一旦有了椭圆型方程正则性结果，利用半群方法，对抛物型方程的正则性结果垂手可得，利用逼近推理，可进一步派生出弱解存在性结论。

§6 Fourier变换和抛物型方程解的正则性

本节假定二阶椭圆算子

$$A=-D_j(a_{ij}D_i)+b_iD_i+c$$

的系数不依赖 t 且有光滑性

$$a_{ij},b_i,c\in C^\infty(\bar{\Omega}),\quad \partial\Omega\in C^\infty \tag{3.69}$$

和强椭圆性

$$\mathrm{Re}\,a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\quad x\in\Omega,\xi\in\mathbf{R}^n.\ \alpha>0\text{是常数}. \tag{3.70}$$

相应共轭双线性型如前。由 Gårding 不等式知存在 $\xi_0>0$ 和 $\delta>0$ 使

$$a(v,v)+\xi_0\|v\|_0^2\geqslant\delta\|v\|_1^2,\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

还假设

$$a(u,v)=\overline{a(v,u)}. \tag{3.71}$$

我们先建立椭圆型方程的先验估计。

引理3.13 设 $f\in H^k(\Omega)$，$k\in \boldsymbol{Z}_+$，则存在$u\in H^{k+2}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$满足方程

$$(A+p)u=f, \tag{3.72}$$

其中 $\mathrm{Re}p\geqslant\xi_0$，且有估计

$$|p|\|u\|_0\leqslant C\|f\|_0, \tag{3.73}$$

$$\|u\|_{k+2}\leqslant C(\|f\|_k+|p|^{k/2}\|f\|_0). \tag{3.74}$$

C 是与 f，p 无关的常数。

证明　由椭圆型方程弱解存在性及正则性定理，存在$u\in H^{k+2}(\Omega)$满足方程(3.72)。留给我们的事情只是验证(3.73)及(3.74)。

方程(3.72)两端与 u 作内积得

$$a(u,u)+(\xi+\mathrm{i}\eta)\|u\|_0^2=(f,u),\quad p=\xi+\mathrm{i}\eta. \tag{3.75}$$

两端取实部，由 Gårding 不等式得

$$(\xi-\xi_0)\|u\|_0^2\leqslant\|f\|_0\|u\|_0,$$

$\xi>2\xi_0$ 时得

$$\xi\|u\|_0\leqslant2\|f\|_0.$$

在(3.75)两端取虚部，注意到由 a 的共轭对称性知 a 为实数，我们得

$$\eta\|u\|_0^2=\mathrm{Im}(f,u)\leqslant\|f\|_0\|u\|_0.$$

这就证明了估计(3.73)。

由椭圆型方程解的正则性定理，存在与 p 无关的常数 C 使

$$\|u\|_{k+2}\leqslant C(\|f-pu\|_k+\|u\|_0)\leqslant C'(\|f\|_0+|p|\|u\|_k).$$

由内插不等式得

$$|p|\|u\|_k\leqslant C\|u\|_{k+2}^{k/(k+2)}(|p|^{(k+2)/2}\|u\|_0)^{2/(k+2)}$$
$$\leqslant C(\varepsilon\|u\|_{k+2}+C(\varepsilon)|p|^{(k+2)/2}\|u\|_0).$$

取 $\varepsilon>0$ 满足 $C'C\varepsilon=2^{-1}$ 即得

$$\|u\|_{k+2}\leqslant C(\|f\|_k+|p|^{(k+2)/2}\|u\|_0).$$

再结合估计(3.73)，便导出(3.74)。 ▌

定理3.24 在假设(3.69)—(3.71)之下，设 $f\in H^{k,k/2}(Q)$ 满足

$$D_t^j f(x,0)=0,\qquad j<(k-1)/2,$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}D_t^\mu(x,t)\in L^2(Q),k/2=\mu+\frac{1}{2},\ \mu\in \boldsymbol{Z}_+,$$

则存在 $u\in H^{k+2,(k+2)/2}(Q)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & (x,t)\in Q,\\ u(x,t)=0, & (x,t)\in\Sigma,\\ u(x,0)=0, & x\in\Omega.\end{cases}$$

证明 令 $t<0$ 时 $f(x,t)=0$，并适当延拓 f 到 $t>T$，根据引理3.4，关于 f 的假定保证延拓后

$$f\in H^{k,k/2}(\Omega\times\boldsymbol{R}^1)=L^2(\boldsymbol{R}^1;H^k(\Omega))\cap H^{k/2}(\boldsymbol{R}^1;L^2(\Omega)).$$

我们在 $\boldsymbol{R}^1$ 上解“常”微分方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+AU=f, \tag{3.76}$$

其中 U 是 $H^k(\Omega)$ 中取值的抽象函数，A 是 $H^k(\Omega)$ 中的无界

算子，

$$D(A)=H^{k+2}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\|u\|_{D(A)}=\|u\|_{k+2}+\|Au\|_k.$$

以 $L(p)$ 记 $e^{-\xi t}f$ 的 Fourier 变换，称之为 f 的 Laplace 变换，即

$$\begin{aligned}L(p)&=(Lf)(p)=L(\xi+i\eta)=(F(e^{-\xi t}f(t)))(\eta)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\xi+i\eta)t}f(t)\,dt.\end{aligned}$$

在方程(3.76)两端进行 Laplace 变换，

$$(A+p)LU=Lf,$$

$$LU=(A+p)^{-1}Lf=(A+p)^{-1}L(p).$$

由 Fourier 变换的反演公式

$$e^{-\xi t}U=F_\eta^{-1}((A+p)^{-1}L(p)),$$

这里 F_η^{-1} 表示对变量 η 进行 Fourier 逆变换.由估计 (3.74)，

$$\|(A+p)^{-1}L(p)\|\leqslant C(\|L(p)\|_k+|p|^{k/2}\|L(p)\|_0).$$

由于 $e^{-\xi t}f\in L^2(\boldsymbol{R}^1,H^k(\Omega))$，根据 $L^2(\boldsymbol{R}^1;H^k(\Omega))$ 中Fourier变换的 Planchrel 定理，

$$\|L(\xi+i\eta)\|_k\in L^2(\boldsymbol{R}_\eta^1).$$

又 $e^{-\xi t}f\in H^{k/2}(\boldsymbol{R}^1;L^2(\Omega))$，由 $H^{k/2}(\boldsymbol{R}^1;L^2(\Omega))$的定义，

$$|p|^{k/2}\|L(\xi+i\eta)\|_0\in L^2(\boldsymbol{R}_\eta^1).$$

于是

$$\|(A+p)^{-1}L(p)\|_{k+2}\in L^2(\boldsymbol{R}_\eta^1).$$

再用 $L^2(\boldsymbol{R}^1;H^{k+2}(\Omega))$ 中的 Plancherel 定理，

$$e^{-\xi t}U\in L^2(\boldsymbol{R}^1;H^{k+2}(\Omega)).$$

又由估计(3.73)，

$$|p|^{1+k/2}\|(A+p)^{-1}L(p)\|_0\leqslant|p|^{k/2}\|L(p)\|_0\in L^2(\boldsymbol{R}^1),$$

由 $H^{k/2+1}(\boldsymbol{R}^1;L^2(\Omega))$的定义，

$$Ue^{-\xi t}\in H^{k/2+1}(\boldsymbol{R}^1;L^2(\Omega)),$$

限制在$(0,T)$上我们得到 $u\in H^{k+2,k/2+1}(Q)$. ∎

关于一般初边值问题我们有

推论3.8 设算子A满足(3.69)—(3.71), $f\in H^{k,k/2}(Q)$ 和 $w\in H^{k+2,k/2+1}(Q)$满足相容条件

$$D_t^j(Aw+w')(x,0)=D_t^jf(x,0),\ x\in\Omega,\quad 0\leqslant j<\frac{k-1}{2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}(D_t^{\mu-1}(Aw+w')-D_t^{\mu-1}f(x,t))\in L^2(Q),$$

$$k=2\mu-1,\ \mu\in\boldsymbol{Z}_+,$$

则存在 $u\in H^{k+2,k/2+1}(Q)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{内},\\ u=w, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=w(0), & \Omega\text{内}.\end{cases}$$

推论3.9 设算子A满足(3.69)—(3.71), $f\in L^2(Q)$, $g\in H^{3/2,3/4}(\Sigma)$, $u_0\in H^1(\Omega)$, 且g和u_0满足相容条件

$$u_0(x)=g(x,0),\quad x\in\partial\Omega,$$

则存在唯一的 $u\in H^{2,1}(Q)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{内},\\ u=g, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=u_0(x), & \Omega\text{内}.\end{cases}$$

习　题

1. B是一个Banach空间, $u\in C([a,b];B)$, 证明f

在$[a,b]$一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任意

$$t_1,t_2\in[a,b],\quad |t_1-t_2|<\delta,$$

有

$$\|u(t_1)-u(t_2)\|_B<\varepsilon.$$

2. $u\in C([a,b];B)$，证明 u 强可测，并且 Bochner 可积。

3. 证明推论3.1。

4. B 是可分 Banach 空间，$f,g\in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b;B)$，$\forall\varphi\in C_0^\infty(a,b)$，

$$\int_a^b f\varphi\,\mathrm{d}t=\int_a^b g\varphi\,\mathrm{d}t,$$

证明 $f(t)=g(t)$，a.e. $t\in(a,b)$。

5. $u\in C^{(k)}([a,b];B)$，$b'\in B'$，证明

$$((b',u(t)))^{(k)}=(b',u^{(k)}(t)).$$

6. B 是 Hilbert 空间，建立 $L^2(\boldsymbol{R}^1;B)$中的 Plancherel 定理。

7. B 是 Hilbert 空间，$t\in(1/2,3/2)$，证明

$$H^s(\boldsymbol{R}^1;B)\hookrightarrow C^{s-1/2}(\boldsymbol{R}^1;B).$$

8. 设 Ω 是足够光滑的区域，证明

$$H^{r,s}(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^1)|_{\Omega\times(a,b)}=L^2(a,b;H^r(\Omega))\cap H^s(a,b;L^2(\Omega)).$$

9. $u\in H^{r,s}(\Omega\times(a,b))$，证明

$$D_t^k u(\cdot,t)\in H^{p_k}(\Omega),\ p_k=\frac{r}{s}\left(s-k-\frac{1}{2}\right)>0.$$

10. 证明 $L^2(a,b;B)$完备。

11. 证明 $L^2(\boldsymbol{R}^1;B)$有平移连续性，即对 $u\in L^2(\boldsymbol{R}^1;B)$ 有

$$\int_{\boldsymbol{R}^1}\|u(t+h)-u(t)\|_B^2\,\mathrm{d}t\to0\quad(h\to0).$$

12．A_1和A_2是Banach空间B中的两个可交换的有界线性算子，证明$e^{A_1+A_2}=e^{A_1}e^{A_2}$。

13．$A\in\mathscr{L}(B)$，证明$\frac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA}$。

14．$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$，$A(t)=-D_j(a_{ij}(x,t)D_i)+b_i(x,t)D_iu+c(x,t)$，研究问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{内},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}=g, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega\end{cases}$$

的解$u\in H^{2,1}(Q)$的条件。

15．A同上题，研究问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+Au=f, & Q\text{内},\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}+\sigma u=g, & \Sigma\text{上},\\ u(x,0)=u_0(x), & \Omega\text{内}\end{cases}$$

的解$u\in H^{2,1}(Q)$的条件。

16．V是一个Hilbert空间，$a(t,u,v)$是V上的有界共轭双线性型，$a(\cdot,u,v)\in C^1([a,b])$，证明存在常数$M>0$使

$$|a(t,u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,$$
$$|a'(t,u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,$$
$$t\in[a,b],u,v\in V.$$

17．Ω是边界光滑的区域，

$W^m(0,T;\Omega)=\{u\in L^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))|$

$$u' \in L^2(v,T;H^{m-1}(\Omega))\},$$

证明

$$W^m(0,T;\Omega) \hookrightarrow C^0([0,T];H^m(\Omega)).$$

18. $m \in \boldsymbol{Z}, m \geqslant 1$, Ω是有界开集，$\partial\Omega \in C^m$，考虑问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & Q\text{内}, \\ u = g, & \Sigma\text{上}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \Omega\text{内}. \end{cases}$$

设

$f \in L^2(0,\infty;H^{m-2}(\Omega))$，$u_0 \in H^{m-1}(\Omega)$，$\tilde{g} \in L^2(0,\infty;H^m(\Omega))$，

$$\frac{\partial g}{\partial t} \in L^2(0,\infty;H^{m-2}(\Omega)),$$

用 Laplace 变换证明问题有解 $u \in W^m(0,T;\Omega)$.

19. $\Omega = (a,b)$，用特征函数展开解下列问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a<x<b, \ t>0,$$

$$u(a,t) = g_a(t), \ u(b,t) = g_b(t), \quad t>0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in L^2(a,b).$$

20. $\Omega = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2 + y^2 < R^2\}$，用特征函数展开解下列问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \triangle u, \quad (x,y) \in \Omega, \ t>0, \\ u(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega), \quad t>0, \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

21. 给定 Hilbert 空间 $V, H, V \hookrightarrow H$，$a(t,u,v)$ 是V上的共轭双线性型，$a(\cdot,u,v) \in C^1(\boldsymbol{R}^1)$，$\forall u,v \in V$，

$$|a(t,u,v)| + |a'(t,u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|,$$

$$\operatorname{Re} a(t,v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2,\ \alpha>0,\ \forall v\in V.$$

1）给定 $f\in L^2(\boldsymbol{R}^1;H)$，存在 $u\in L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v)+a(t,u(t),v)=(f(t),v).$$

2）用对 t 的 Fourier 变换证明存在C使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t,$$

由此导出唯一性。

3）设 $f,f'\in L^2(\boldsymbol{R}^1;H)$，证明 $u'\in L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$。

(提示：令 $w_h(t)=h^{-1}(u(t+h)-u(t))$，证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\|w_h(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant C.\ \ C\text{ 与 } h \text{ 无关}).$$

4）证明$|\tau|^{3/2}\hat{u}\in L^2(\boldsymbol{R}^1;H)$。

22．$\Omega\subset\boldsymbol{R}^2$，$H=L^2(\Omega)$，$V=\{u\in L^2(\Omega)\,|\,D_{12}u\in L^2(\Omega)\}$，

$$a(t,u,v)=\int_\Omega a_0(x,t)D_{12}uD_{12}\bar{v}\mathrm{d}x,$$

$a_0\in L^\infty(Q)$，$\operatorname{Re}a_0(x,t)\geqslant\alpha>0$，a.e. $(x,t)\in Q$，$f\in L^2(Q)$，证明存在 $u\in L^2(Q)$满足 $D_{12}u\in L^2(Q)$，

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^T[a(t,u,\varphi)-(u,\varphi')]\mathrm{d}t=\int_0^T(f,\varphi)\mathrm{d}t,\\ \qquad\forall\varphi\in C^1([0,T];V),\varphi(0)=\varphi(T)=0,\\ u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\Omega.\end{cases}$$

写出 u 所满足的方程。

23．$\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$，$\partial\Omega\in C^\infty$，$H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega)$，$Q=\Omega_x(0,T)$，

$$a_0(t,u,v)=\int_\Omega a_{ij}(x,t)D_iu(x)D_j\bar{v}(x)\mathrm{d}x,\ a_{ij}\in L^\infty(Q),$$

$$a_1(t,u,v)=\int_\Gamma a_1(x,t)\gamma_0u\gamma_0\bar{v}\mathrm{d}\Gamma,$$

$$a_1 \in L^\infty(\Gamma \times (0,T)), \Gamma = \partial\Omega,$$

$$\mathrm{Re} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2, \xi \in C^n, a_1(x,t) \geqslant \alpha_1 > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}a_1(x,t) \in L^\infty(\Gamma \times (0,T)),$$

$$f \in L^2(Q), \quad u_0 \in H^{1/2}(\Gamma).$$

证明存在唯一的 $u \in L^2 \in L^2(0,T;V)$ 满足

$$\int_0^T \{a_0(t,u(t),v)\varphi(t) - a_1(t,u(t),v)\varphi'(t)\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T (f(t),v)\varphi(t)\mathrm{d}t,$$

$$\forall v \in V, \quad \varphi \in C^1([0,T]), \quad \varphi(T) = 0.$$

写出 u 所满足的方程和初边条件。

24．前题取 $V = H^1(\Omega)$，写出相应的边条件。

25．前题取 $V = \{v \in H^1(\Omega) | v|_{\Gamma_1} = 0\}, \Gamma_1 \subset \Gamma, \mathrm{mes}\Gamma_1 > 0$，写出相应的边条件。

26．设 $V \subsetneq H$，$a(t,u,v)$ 是 V 上的双线性型，

$$|a(t,u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|, \quad \forall u,v \in V,$$

$$\mathrm{Re}a(t,v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2, \quad \forall \in V, \quad \alpha > 0 \text{为常数。}$$

给定 $\xi \in H$，取 $\xi_n \in V$，$|\xi_n - \xi| \to 0 (n \to \infty)$。设 $\|\xi_n\| = \lambda_n \to \infty$。令 $0 < \mu_n < 1/\lambda_n$，取 n 充分大使 $1/\lambda_n < T$，设 $f \in L^2(0,T;H)$，

$$a(t,u,v) = ((A(t)u,v)), \quad A(t) \in \mathscr{L}(V),$$

$$A_{kn} = h^{-1}\int_{\mu_n + kh}^{\mu_n + (k+1)h} A(t)\mathrm{d}t, \quad k = 0,1,\cdots,n-1,$$

$$f_{kn} = h^{-1}\int_{\mu_n + kh}^{\mu_n + (k+1)h} f(t)\mathrm{d}t, \quad k = 0,1,\cdots,n-1.$$

证明存在 $u_{kn} \in V$ 是下列“椭圆型”方程的解

$$\begin{cases}((A_{kn}u_{kn},v))+h^{-1}(u_{kn}-u_{(k-1)n},v)\\ \quad =(f_{kn},v),\ \forall v\in V,\\ u_{-1,n}=\xi_n.\end{cases}$$

定义

$$u_n(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \xi_n, & t\in[0,\mu_n];\\ u_{kn}, & t\in[\mu_n+kh,\mu_n+(k+1)h],\\ & k=0,1,\cdots,n-1.\end{cases}$$

证明 $n\to\infty$ 时 $u_n\to u\in L^2(0,T;V)$ 满足

$$\begin{cases}a(t,u(t),v)+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),v)=(f(t),v), & \mathscr{D}'(0,T)\text{中},\\ u(0)=\xi.\end{cases}$$

第四章　双曲型方程

和抛物型方程的情形一样，在椭圆型方程解的正则性结果之后，对相应向量函数的一阶方程援引半群方法即可建立强解的存在性。对于一般的双曲型方程基于 Lions 定理可以得到弱解的存在性及正则性。对于发展方程，Galerkin 方法也是普遍采用并行之有效的方法，它用有穷维空间里的常微分方程组逼近无穷维空间里的方程。当有穷维空间恰好由相应椭圆算子的特征函数张成时，Galerkin 方法归结为特征函数展开方法，这时解被写成级数形式，对建立弱解存在性尤其方便。

§1　半 群 方 法

我们知道半群方法特别适用于算子系数不依赖于 t 的情形。设 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$，$\partial\Omega\in C^2$，考虑算子

$$Au=-D_j(a_{ij}(x)D_iu)+b_i(x)D_iu+c(x)u. \quad (4.1)$$

一如既往，我们对系数做假设

$$\begin{cases} a_{ij}\in C^{0,1}(\overline{\Omega}),b_i,c\in L^\infty(\Omega),\\ a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant a|\xi|^2,x\in\Omega,\xi\in \boldsymbol{R}^n,\\ a(u,v)=\displaystyle\int_\Omega (a_{ij}(x)D_iuD_j\overline{v}+b_i(x)(D_iu)\overline{v}+C(x)u\overline{v})\mathrm{d}x\\ \qquad\quad =\overline{a(v,u)},\quad \forall\, u,v\in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (4.2)$$

定理4.1　设 $f\in C^1([0,T];L^2(\Omega))$，$u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$u_1\in H_0^1(\Omega)$，在条件(4.2)之下，存在唯一的

$$u \in C^0([0,T];H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,T];L^2(\Omega)),$$

满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f, & Q\text{内}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \Sigma\text{上}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & \Omega\text{内}. \end{cases} \tag{4.3}$$

证明 令$\dfrac{\partial u}{\partial t} = v, u(t) = u(\cdot,t)$，方程(4.3)可写为方程组

$$\begin{cases} u' - v = 0, \\ v' + Au = f, \\ u(0) = u_0, v(0) = u_1. \end{cases} \tag{4.4}$$

引进向量和算子

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix},$$

$$QU = Q\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ Au \end{pmatrix},$$

方程(4.4)可写为一个向量函数

$$\begin{cases} U' + QU = F, \\ U(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = U_0. \end{cases} \tag{4.5}$$

我们取基本空间和Q的定义域

$$E = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), D(Q) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

显然有$\overline{D(Q)} = E$。我们要证明λ充分大时，对任意

$$F = (f_1, f_2)^T \in E,$$

方程

$$(\lambda+Q)U=F \tag{4.6}$$

有解，这相当于解方程组

$$\begin{cases} \lambda u-v=f_1\in H_0^1(\Omega), \\ \lambda v+Au=f_2\in L^2(\Omega). \end{cases}$$

由第一个方程 $v=\lambda u-f_1$，代入第二个方程

$$\lambda^2 u+Au=f_2+\lambda f_1. \tag{4.7}$$

由 Gårding 不等式存在 $\lambda_0,\delta>0$ 使

$$a(v,v)+\lambda_0\|v\|_0^2\geqslant\delta\|v\|_1^2,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

于是由椭圆型方程解的存在与正则定理，当 $\lambda>\sqrt{\lambda_0}$ 时(4.7)有解

$$u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),$$

相应地

$$v=\lambda u-f_1\in H_0^1(\Omega),$$

即 $U=(u,v)^T\in D(Q)$ 是(4.6)的解，这说明 $\lambda+Q$ 是满射。为证 $\lambda+Q$ 是单射并估计逆算子的范数，我们做下列计算

$$\begin{aligned}\|(\lambda+Q)U\|_E^2&=\|(\lambda_0+Q)U+(\lambda-\lambda_0)U\|_E^2\\&=\|(\lambda_0+Q)U\|_E^2+(\lambda-\lambda_0)^2\|U\|_E^2\\&\quad+2(\lambda-\lambda_0)\mathrm{Re}(((\lambda_0+Q)U,U))_E,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(((\lambda_0+Q)U,U))_E&=(((\lambda_0u-v,\lambda_0v+Au)^T,(u,v)^T))\\&=((\lambda_0u-v,u))_1+(\lambda_0v+Au,v)_0\\&=((\lambda_0u-v,u))_1+\lambda_0\|v\|_0^2+a(u,v),\end{aligned}$$

为消去项 $a(u,v)$，我们特意在 $H^1(\Omega)$ 中引入内积

$$((u,v))_1=a(u,v)+\lambda_0(u,v). \tag{4.8}$$

不妨设 λ_0 如此大，以致

$$((v,v))_1\geqslant\|v\|_0^2. \tag{4.9}$$

对于这样引入的内积，我们有

$$(((\lambda_0+Q)U,U))_E = a(\lambda_0 u - v, u) + \lambda_0(\lambda_0 u - v, u)$$
$$+ \lambda_0\|v\|_0^2 + a(u,v)$$
$$= \lambda_0 a(u,u) - a(v,u) + \lambda_0^2(u,u)$$
$$- \lambda_0(v,u) + \lambda_0\|v\|_0^2 + a(u,v)$$
$$= \lambda_0(a(u,u) + \lambda_0(u,u) - (v,u) + (v,v)).$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\mathrm{Re}(((\lambda_0+Q)U,U))_E \geqslant \lambda_0((u,u) - \|v\|_0\|u\|_0 + (v,v)) \geqslant 0.$$

于是有

$$\|(\lambda+Q)U\|_E^2 \geqslant (\lambda-\lambda_0)^2\|V\|_E^2,$$
$$\|(\lambda+Q)^{-1}\| \leqslant (\lambda-\lambda_0)^{-1}.$$

递推得

$$\left\|\left(I+\frac{Q}{\lambda}\right)^{-k}\right\| \leqslant \left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{-k}, \lambda > \lambda_0.$$

由 Hille-Yosida 定理，$-Q$ 是 E 中某一连续线性半群 $T(t)$ 的无穷小生成元。再由 $U_0 \in D(Q)$，$F \in C^1([0,T];E)$，根据定理3.19，Cauchy 问题(4.5)有解

$$U \in C^1([0,T];E), U(t) \in D(Q),$$

即

$$u \in C^1([0,T];H_0^1(\Omega)),$$
$$v = u' \in C^1([0,T];L^2(\Omega)),$$
$$u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

由方程 $Au(t) = f(t) - u''(t) \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ 易知

$$u \in C^0([0,T];H^2(\Omega)). \quad \blacksquare$$

定理4.2 设算子 A 的系数满足条件(4.2)，

$$f \in L^2(Q), u_0 \in H_0^1(\Omega), u_1 \in L^2(\Omega),$$

则存在唯一的

$$u\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

满足(4.3)，其中$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in L^2(0,T;H^1(\Omega))$，方程的意义是

$$\int_0^T[-(u',\varphi')+a(u,\varphi)-(f,\varphi)]\mathrm{d}t-(u_1,\varphi(0))=0,$$

$$\forall\,\varphi\in\Phi=\{\varphi\in C^1([0,T];H_0^1(\Omega))\,|\,\varphi(T)=0\}. \quad (4.10)$$

证明 采用逼近推理取

$$f_n\in C^1([0,T];L^2(\Omega)),u_{0n}\in C_0^\infty(\Omega),u_{1n}\in C_0^\infty(\Omega)$$

满足：当 $n\to\infty$时

$$\|f_n-f\|_{0,Q}\to 0,\|u_{0n}-u_0\|_{1,\Omega}\to 0,\|u_{1n}-u_1\|_{0,\Omega}\to 0.$$

由定理4.1，存在

$$u_n\in C([0,T];H^2(\Omega))\cap C^1([0,T];H_0^1(\Omega))$$
$$\cap C^2([0,T];L^2(\Omega))$$

满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}+Au_n=f_n, & Q\text{内},\\ u_n(x,0)=u_{0n}, & \Sigma\text{上},\\ \dfrac{\partial u_n}{\partial t}(x,0)=u_{1n}, & \Omega\text{内}.\end{cases}\quad (4.11)$$

现在对逼近解 u_n 做估计。(4.11)中的方程与$\frac{\partial u_n}{\partial t}$在 $L^2(Q)$中做内积，注意到a 的共轭对称性，我们得

$$\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t),\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(t)\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(u_n(t),u_n(t))\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\left(f_n(t),\frac{\partial u_n}{\partial t}(t)\right)\mathrm{d}t,$$

$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}(T)\right\|_{0,\Omega}^2 - \|u_{1n}\|_{0,\Omega}^2 + a(u_n(T), u_n(T)) - a(u_{0n}, u_{0n})$$

$$\leqslant \|f_n\|_{0,Q} + \int_0 \left\|\frac{\partial u_n}{\partial t}(t)\right\|_{0,\Omega}^2 \mathrm{d}t.$$

由 Gårding 不等式

$$\|u_n'(T)\|_{0,\Omega}^2 + \delta\|u_n(T)\|_{1,\Omega}^2 - \lambda_0\|u_n(T)\|_0^2$$

$$\leqslant \|u_{1n}\|_{0,\Omega}^2 + M\|u_{0n}\|_{1,\Omega}^2 + \|f_n\|_{0,Q}^2 + \int_0^T \|u_n'(t)\|_{0,\Omega}^2 \mathrm{d}t.$$

由于

$$u_n(T) = u_{0n} + \int_0^T u_n'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\|u_n(T)\|_{0,\Omega} \leqslant \|u_{0n}\|_{0,\Omega} + \int_0^T \|u_n'(t)\|_{0,\Omega}\mathrm{d}t.$$

我们有(把 T 换为 t)

$$\|u_n'(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_n(t)\|_{1,\Omega}^2$$

$$\leqslant C\left(\|u_{0n}\|_{1,\Omega}^2 + \|u_{1n}\|_{0,\Omega}^2 + \|f_n\|_{0,Q}^2 + \int_0^t \|u_n'(t)\|_{0,\Omega}^2 \mathrm{d}t\right).$$

由 Gronwall 不等式(见下面的引理)，从上式即得

$$\|u_n'(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_n(t)\|_{1,\Omega}^2$$

$$\leqslant C(\|u_{0n}\|_{1,\Omega}^2 + \|u_{1n}\|_{0,\Omega}^2 + \|f_n\|_{0,Q}^2). \qquad (4.12)$$

对 $u_n - u_m$ 用这个不等式，我们得到

$$\|u_n'(t) - u_m'(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|u_n(t) - u_m(t)\|_{1,\Omega}^2$$

$$\leqslant C(\|u_{0n} - u_{0m}\|_{1,\Omega}^2 + \|u_{1n} - u_{1m}\|_{0,\Omega}^2 + \|f_n - f_m\|_{0,Q}^2) \to 0,$$

$$n, m \to \infty.$$

于是当 $n \to \infty$ 时

$u_n(t) \to u(t)$，在 $H_0^1(\Omega)$ 中关于 t 在 $[0,T]$ 一致，

$u_n'(t) \to u'(t)$，在 $L^2(\Omega)$ 中关于 t 在 $[0,T]$ 一致，

又 u_n 和 u_n' 分别在区间 $[0,T]$ 上作为 $H_0^1(\Omega)$ 值和 $L^2(\Omega)$ 值函

数连续，故其一致收敛的极限 u 和 u' 在 $[0,T]$ 上作为 $H_0^1(\Omega)$ 值和 $L^2(\Omega)$ 值函数连续。

任取 $\varphi\in\Phi$，(4.11)中的方程与 φ 在 $L^2(Q)$ 中做内积，利用分部积分和 Green 公式得到

$$\int_0^T[-(u_n',\varphi')+a(u_n,\varphi)-(f_n,\varphi)]\mathrm{d}t-(u_{1n},\varphi(0))=0.$$

令 $n\to\infty$ 取极限即得(4.10)。

最后证唯一性。设 $u_0=0, u_1=0, f=0$，要证 $u=0$。为此取定 $s\in(0,T)$，令

$$\varphi(t)=\begin{cases}-\int_t^s u(\sigma)\mathrm{d}\sigma, & t\leqslant s;\\ 0, & t>s.\end{cases}$$

代入(4.10)给出

$$\int_0^s[a(\varphi',\varphi)-(u',u)]\mathrm{d}t=0.$$

由 a 的共轭对称性，

$$\int_0^s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[a(\varphi,\varphi)-(u,u)]\mathrm{d}t=0,$$

$$\begin{aligned}&a(\varphi(s),\varphi(s))-a(\varphi(0),\varphi(0))\\&\quad-(u(s),u(s))+(u(0),u(0))=0,\end{aligned}$$

$$a\left(\int_0^s u(t)\mathrm{d}t,\ \int_0^s u(t)\mathrm{d}t\right)+(u(s),u(s))=0.$$

由 Gårding 不等式

$$\delta\left\|\int_0^s u(t)\mathrm{d}t\right\|_1^2+\|u(s)\|_0^2\leqslant\lambda\left\|\int_0^s u(t)\mathrm{d}t\right\|_0^2\leqslant\lambda\int_0^s\|u(t)\|_0^2\mathrm{d}t.$$

由 Gronwall 不等式

$$u(s)=0, s\in(0,T)\text{任意。}\ \blacksquare$$

引理4.1(Gronwall 不等式) 设 $f\in C([0,T])$, $f\geqslant 0$, 满足

$$f(t)\leqslant C_1+C_2\int_0^t f(z)\,\mathrm{d}\tau,$$

C_1和 C_2是非负常数，则有

$$f(t)\leqslant C_1 e^{C_2 t}, t\in[0,T].$$

证明 令

$$F(t)=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s e^{-C_2 t}+\frac{C_1}{C_2}e^{-C_2 t},$$

则有

$$F'(t)=e^{-C_2 t}\left(f(t)-C_2\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s-C_1\right)\leqslant 0.$$

故 F 在$[0,T]$单调下降，$F(t)\leqslant F(0)$，即

$$\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t e^{-C_2 t}+\frac{C_1}{C_2}e^{-C_2 t}\leqslant\frac{C_1}{C_2}.$$

由此即得结论。 ▌

§2 Lions 定理和双曲型方程

上节我们讨论了齐次 Dirichlet 边条件的双曲型方程的 Cauchy问题，大凡系数不依赖于 t 的椭圆型方程解的正则性问题一旦解决，相应双曲型方程的 Cauchy 问题利用半群方法即应刃而解。利用对 t 的冻结方法，系数依赖于 t 时相应问题亦可解决。当相应椭圆型方程解的正则性问题尚未解决时，我们可采用基于 Lions 定理的方法。

2.1 双曲型方程解的存在唯一性

和讨论抽象抛物型方程的框架一样，给定两个可分

Hilbert空间V和H，$V\subsetneq H$，V在H中稠密，V和H的内积分别记为$((\ ,\ ))$和$(\ ,\ )$，范数分别记为$\|\ \|$和$|\ |$。把H与其共轭对偶空间等同，则有包含关系$V\subsetneq H\subsetneq V'$。

定理4.3 设在V上给定共轭双线型族

$$a(t,u,v),t\in[0,T],$$

满足条件

$$a(\cdot\ ,u,v)\in C'([a,T]),\ \forall u,v\in V\text{(连续性)},$$

$$a(t,u,v)=\overline{a(t,v,u)}\text{(共轭对称性)}.$$

存在$\lambda,\alpha>0$，使$a(t,v,v)+\lambda|v|^2\geqslant\alpha\|v\|^2$，$\forall v\in V$ **(强制性)**，则存在唯一的函数$u\in L^2(0,T;V)$，满足

$$u'\in L^2(0,T;H),u''\in L^2(0,T;V'),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'(t),v)+a(t,u(t),v)=(f(t),v),\\ \qquad\qquad \forall v\in V,\text{a.e.}\,t\in(0,T),\\ u(0)=0,\\ u'(0)=u_1.\end{cases}\tag{4.13}$$

以下为叙述简单，设$\lambda=0$，而把$\lambda>0$的情形留作习题(注意并不象抛物情形那样，做变换$u=e^{\lambda t}w$不能直接达到目的，因为这里出现了关于t的一阶导数项w')。我们延拓$a(t,u,v)$到$t\in[0,\infty)$，保持下列性质

$$\begin{aligned}&|a(t,u,v)|+|a'(t,u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,\\ &\forall u,v\in V,t\in[0,\infty).\end{aligned}\tag{4.14}$$

在证明定理之前，先准备几个引理。

引理4.2 设V是任一Hilbert空间，对任意$u\in H^1(0,\infty;V)$有

$$u(t)\to0\ \ (t\to\infty).$$

证明 以$(\ ,\ )$记V中的内积，由Newton-Leibniz公式

$$(u(t),u(t))=(u(0),u(0))+\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),u(t))\mathrm{d}t$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^t (u'(t),u(t))\mathrm{d}t.$$

由 $|(u'(t),u(t))|<|u'(t)||u(t)|$，$|u|$，$|u'|\in L^2(0,\infty)$ 知

$$(u'(t),u(t))\in L^1(0,\infty),$$

故极限

$$\lim_{t\to\infty}(u(t),u(t))=(u(0),\ u(0))+2\mathrm{Re}\int_0^\infty (u'(t),u(t))\mathrm{d}t$$

存在。又 $(u(t),u(t))\in L^1(0,\infty)$，立即得

$$(u(t),u(t))\to 0\quad (t\to\infty).\ \blacksquare$$

引理4.3 存在 $\gamma>0$ 和 $\beta>0$，使对任意

$$\varphi\in\Phi=\{\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi\in L^2(0,\infty;V)\,|\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi'\in L^2(0,\infty;V),$$
$$\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi''\in L^2(0,\infty;H),\varphi(0)=0\}$$

有不等式

$$\mathrm{Re}\int_0^\infty [a(t,\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi,\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi')-(\varphi',(\mathrm{e}^{-2\gamma t}\varphi')')]\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\beta\|\varphi\|_\Phi^2, \tag{4.15}$$

其中

$$\|\varphi\|_\Phi^2=\int_0^\infty (\|\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi\|^2+|\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi'|^2)\mathrm{d}t+|\varphi'(0)|^2. \tag{4.16}$$

证明 我们分别估计(4.15)左端的每一项。

$$X=2\mathrm{Re}\int_0^\infty a(t,\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi,\mathrm{e}^{-\gamma t}\varphi')\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\gamma t}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t,\varphi(t),\varphi(t))-a'(t,\varphi(t),\varphi(t))\right\}\mathrm{d}t,$$

$$a'(t,\varphi,\varphi)=\frac{\partial}{\partial t}a(t,\varphi,\varphi).$$

由引理4.2，

$$e^{-2\gamma t}((\varphi(t),\varphi(t)))\to 0\quad (t\to+\infty).$$

由 a 的有界性并利用引理4.2，

$$|a(t,\varphi(t),\varphi(t))|\leqslant M\|\varphi(t)\|^2\to 0\quad (t\to\infty).$$

进行分部积分并利用 a' 的有界性得

$$X=\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\{2\gamma a(t,\varphi,\varphi)-a'(t,\varphi,\varphi)\}dt$$

$$\geqslant\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\{2\gamma a-M\}\|\varphi\|^2dt.$$

类似地，

$$Y=2\mathrm{Re}\left(-\int_0^\infty(\varphi',(e^{-2\gamma t}\varphi')')dt\right.$$

$$=-\int_0^\infty(\varphi',(e^{-2\gamma t}\varphi')')dt-\int_0^\infty((e^{-2\gamma t}\varphi')',\varphi')dt$$

$$=4\gamma\int_0^\infty e^{-2\gamma t}(\varphi',\varphi')dt-\int_0^\infty e^{-2\gamma t}[(\varphi',\varphi'')+(\varphi'',\varphi')]dt$$

$$=4\gamma\int_0^\infty e^{-2\gamma t}(\varphi',\varphi')dt-\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\frac{d}{dt}(\varphi'\varphi')dt$$

$$=4\gamma\int_0^\infty e^{-2\gamma t}|\varphi'|^2dt+|\varphi'(0)|^2.$$

与 X 的估计式相加

$$X+Y\geqslant\int_0^\infty e^{-2\gamma t}[(2\gamma a-M)\|\varphi\|^2+2\gamma|\varphi'|^2]dt+|\varphi'(0)|^2.$$

取 $\gamma=\max((M+2)/(2a),1)$，则有 $X+Y\geqslant\|\varphi\|_\Phi^2$. ▎

定理4.3的证明 取 $\gamma>0$ 为引理4.3中的常数，令

$$F=\{u\,|\,e^{-\gamma t}u\in L^2(0,\infty;V),$$
$$e^{-\gamma t}u'\in L^2(0,\infty;H),u(0)=0\},$$

$$\Phi=\{\varphi\,|\,e^{-\gamma t}\varphi\in L^2(0,\infty;V),e^{-\gamma t}\varphi'\in L^2(0,\infty;V),$$
$$e^{-\gamma t}\varphi''\in L^2(0,\infty;H),\varphi(0)=0\},$$

$$\|u\|_F^2=\int_0^\infty \{\|e^{-\gamma t}u\|^2+|e^{-\gamma t}u'|^2\}dt,$$

$$E(u,\varphi)=\int_0^\infty [a(t,e^{-\gamma t}u,e^{-\gamma t}\varphi')-(u',(e^{-2\gamma t}\varphi')')]dt,$$

$$u\in F,\varphi\in\Phi,$$

$$L(\varphi)=\int_0^\infty (e^{-\gamma t}f,e^{-\gamma t}\varphi')dt+(u_1,\varphi'(0)).$$

显然$\|\varphi\|_\Phi\geqslant\|\varphi\|_F$，由引理4.3，$E$在$\Phi$上强制，由Lions定理，存在$u\in F$使

$$E(x,\varphi)=L(\varphi),\ \forall\varphi\in\Phi. \qquad (4.7)$$

对任意$v\in V$，任意$\theta\in C^\infty([0,\infty))$，当$t$充分大时$\theta(t)=0$。令

$$\psi(t)=\int_0^t e^{2\gamma t}\theta(\sigma)d\sigma,\varphi(t)=\psi(t)v\in\Phi.$$

以φ代入(4.17)得

$$\int_0^\infty a(t,u(t),v)\overline{\theta(t)}\,dt-\int_0^\infty (u'(t),v)\overline{\theta'}(t)dt$$

$$=\int_0^\infty (f(t),v)\overline{\theta(t)}dt+(u'(0),v)\ \overline{\theta(0)}. \qquad (4.18)$$

令

$$a(t,u,v)=(A(t)u,v),A(t)\in\mathscr{L}(V,V'),$$

和抛物型方程的情形一样，由(4.18)即得

$$u''\in L^2(0,T;V')$$

且满足方程

$$u''+Au=f. \qquad (4.19)$$

显然$u'\in C^0([0,J];V')$，$u'(0)$有意义，且用通常的方法推得

$$u'(0)=u_1.$$

(4.19)与任意

$$\varphi\in\tilde{\Phi}=\{\varphi\in L^2(0,T;V)\mid\varphi'\in L^2(0,T;H),\varphi(T)=0\}$$

做对偶积，进行分部积分得

$$\int_0^T[a(t,u(t),\varphi(t))-(u'(t),\varphi'(t))]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T(f(t),\varphi(t))\mathrm{d}t+(u_1,\varphi(0)). \qquad (4.20)$$

现证唯一性.设 $f=0,u_1=0$,要证 $u=0$. 任取 $s\in(0,T)$,令

$$\varphi(t)=\begin{cases}-\int_t^s u(\sigma)\mathrm{d}\sigma, & t\leqslant s;\\ 0, & t>s.\end{cases}$$

把这个 φ 代入(4.20),

$$\int_0^s[a(t,\varphi'(t),\varphi(t))-(u'(t),u(t))]\mathrm{d}t=0,$$

$$\int_0^s\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t,\varphi(t),\varphi(t))-a'(t,\varphi(t),\varphi(t))-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t),u(t))\right]\mathrm{d}t=0,$$

$$a(0,\varphi(0),\varphi(0))+(u(s),u(s))+\int_0^s a'(t,\varphi(t),\varphi(t))\mathrm{d}t=0.$$

由 a 的强制性和 a' 的有界性

$$\|\varphi(0)\|^2+|u(s)|^2\leqslant C\int_0^s\|\varphi(t)\|^2\mathrm{d}t.$$

令

$$v=\int_0^t u(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

则有

$$\|v(s)\|^2+|u(s)|^2\leqslant C\int_0^s\|v(t)-v(s)\|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant 2C\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t+2C_s\|v(s)\|^2,$$

$$(1-2C_s)\|v(s)\|^2\leqslant 2C\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t.$$

取 $s_0>0$满足 $(1-2C_{s0})=\frac{1}{2}$，当$0<s\leqslant s_0$时

$$\|v(s)\|^2\leqslant 4C\int_0^s\|v(t)\|^2\mathrm{d}t.$$

由 Gronwall 不等式，当 $s\leqslant s_0$ 时 $v(s)=0$，从而 $u(s)=0$。s_0 的大小不依赖于时间起点的选取，故 u 在$[s_0,2s_0]$上为零，有限步后即得 u 在$[0,T]$上为零。▌

对非零初值我们有

定理4.4 保留定理4.3的假设，并设

$$a(\cdot,u,v)\in C^2([0,T]),u_0\in D(A(0)),$$

则问题

$$\begin{cases}u''+A(t)u(t)=f,\\u(0)=u_0,\\u'(0)=u_1\end{cases}\tag{4.21}$$

有唯一解 u 满足

$$u\in L^2(0,T;V),u'\in L^2(0,T;H),u''\in L^2(0,T;V').$$

这里 $u_0\in D(A(0))$表示对由

$$a(t,u,v)=(A(t)u,v)$$

定义的算子 $A(t)\in\mathscr{L}(V,V')$有 $A(\theta)u_0\in H$。

证明 设 $\theta\in C^2([0,\infty))$满足

$$\theta(0)=1,\quad\theta'(0)=0,$$

$w(t)$是下列问题的解

$$a(t,w(t),v)=\theta(t)(A(0)u_0,v),\quad \forall v\in V.$$

由 Lax-Milgram 定理，解 w 存在，再由引理3.9，

$$w''\in L^\infty(0,T;V), \text{且 } w(0)=u_0.$$

令 $U(t)=u(t)-w(t)$，则 U 满足初值 $U(0)$ 的相应方程，由定理4.3即得结论。 ▍

2.2 双曲型方程解的正则性

关于解的正则性我们有

定理4.5 设定理4.3的条件满足，并且

$$a(\cdot,u,v)\in C^{k+1}([0,T]),\ \forall u,v\in V,$$

$$f,f',\cdots,f^{(k)}\in L^2(0,T;H),$$

$$u_0=u_1=0,$$

则问题(4.21)的解满足

$$u,u',\cdots,u^{(k)}\in L^2(0,T;V),u^{(k+1)}\in L^2(0,T;H).$$

证明与定理4.3类似，留作习题。

例 $\Omega\subset \boldsymbol{R}^n$ 是一个有界区域，$\partial\Omega$ 光滑，取 V 满足

$$H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega),H=L^2(\Omega),$$

在 V 上定义共轭双线性型

$$a(t,u,v)=\int_\Omega (a_{ij}D_iuD_j\bar{v}+b_iD_iu\bar{v}+cu\bar{v})\,\mathrm{d}x,$$

其系数满足

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

$$a_{ij},b_i,c\in L^\infty(Q),a(\cdot,t)\in C^0(\bar{\Omega}),$$

$$a_{ij}=\bar{a}_{ji},\quad b_i \text{ 纯虚数},\quad c-\bar{c}=D_ib_i.$$

在这些条件下

$$a(t,u,v)=\overline{a(t,v,u)},$$

存在 $\lambda,\delta>0$，使

$$a(t,v,v)+\lambda|v|^2\geqslant\delta\|v\|^2,\quad \forall v\in V.$$

又设

$$a_{ij}(x,\cdot),b_i(x,\cdot),c(x,\cdot)\in C^1([0,T]),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}a_{ij},\ \frac{\partial}{\partial t}b_i,\ \frac{\partial}{\partial t}c\in L^\infty(Q),$$

则

$$a(\cdot,u,v)\in C^1([0,T]),\ \forall u,v\in V.$$

又设 $f\in L^2(Q)$, $u_1\in L^2(\Omega)$，由定理4.3，存在 $u\in L^2(0,T;V)$，满足

$$u'\in L^2(0,T;H),\ u''\in L^2(0,T;V'),$$
$$u(0)=0,\ u'(0)=u_1,\ u''+Au=f.$$

若 $V=H_0^1(\Omega)$，则 u 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-D_j(a_{ij}D_iu)+b_iD_iu+cu=f,\\ u=0,\quad \Sigma\text{ 和 }\Omega\times\{0\}\text{上},\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\quad \Omega\text{ 内}.\end{cases}\tag{4.22}$$

若 $a_{ij},b_i,c\in C^{2,1}(\bar{Q})$, $f,f'\in L^2(Q)$, $u_0=u_1=0$，则问题(4.22)的解 u 满足

$$u''\in L^2(Q),\ u'\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

再由椭圆型方程解的正则性结果，

$$u\in L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

从而 $u\in H^2(Q)$.

§3 Galerkin 方法

3.1 弱解的存在性

Galerkin 方法的实质在于用有穷维空间上的常微分方程

组代替无穷维空间上的变分方程，得到近似解序列，对近似解做各种估计，在相应空间上取弱收敛极限，最后证明这个极限在适当意义下满足方程和初边条件。

定理4.6 在定理4.3的条件下，设数据

$$f\in L^2(0,T;H),u_0\in V,u_1\in H,$$

则存在唯一的函数 $u\in L^\infty(0,T;V)$，满足

$$u'\in L^2(0,T;H),u''\in L^2(0,T;V')\text{和}$$

$$\begin{cases} u''+Au=f, \\ u(0)=u_0,u'(0)=u_1. \end{cases} \tag{4.21}$$

证明 若 $u\in L^\infty(0,T;V)$，则 $Au\in L^\infty(0,T;V')$，从而 $u''\in L^2(0,T;V')$。又 $u'\in L^\infty(0,T;H)$，于是有

$$u\in c([0,T;H)\text{和 }u'\in C([0,T];V').$$

这样 $u(0)$和 $u'(0)$有意义。

由V的可分性，可取$\{\omega_i|i=1,2,\cdots\}\subset V$，$\omega_i$的有限线性组合的子空间在$V$中稠密，又可设$\{\omega_i|i=1,2,\cdots\}$在 H中标准正交，即$(\omega_i,\omega_j)=\delta_{ij}$。以下列方式确定$m$阶近似解

$$u_m(t)=\sum_{i=1}^m g_{mi}w_i,$$

其中 $g_{mi}=g_{mi}(t)$由下列常微分方程组的 Cauchy 问题确定

$$\begin{cases} \int g''_{mj}+a(t,u_m(t),w_j)=(u''_m,w_j)+a(t,u_m(t),w_j) \\ \qquad =(f(t),w_j),\quad j=1,\cdots,m, \\ g_{mi}(0)=\xi_{mi},g'_{mi}(0)=\eta_{mi}. \end{cases} \tag{4.23}$$

ξ_{mi}和η_{mi}如下选择，使 $m\to\infty$时

$$\left\|\sum_{i=1}^m\xi_{mi}w_i-u_0\right\|\to0,\left|\sum_{i=1}^m\eta_{mi}w_i-u_1\right|\to0.$$

方程(4.23)可改写为

$$g''_{mj}+\sum_{i=1}^{m}a(t,w_i,w_j)g_{mi}=(f(t),w_j),$$

$$j=1,2,\cdots,m.$$

这里 g_{mi} 的系数 $a(t,w_i,w_j)\in C([0,T])$，自由项$(f(t),w_j)\in L^2(0,T)$，由常微分方程组的理论知道存在(4.23)的唯一解

$$g_{mi},\quad i=1,2,\cdots,m.$$

$$g_{mi}\in C^1([0,T]),g'_{mi}\text{ 在}[0,T]\text{绝对连续。}$$

方程(4.23)乘以 $\bar{g}'_{mj}$，对 j 从 1 至 m 求和，

$$(u''_m,u'_m)+a(t,u_m(t),u'_m(t))=(f(t),u'_m(t)).$$

在$(0,T)$上积分，取实部的二倍

$$\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u'_m,u'_m)\mathrm{d}t+\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a(t,u_m(t),u_m(t))\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^T a'(t,u_m(t),u_m(t))\mathrm{d}t$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^T(f(t),u'_m(t))\mathrm{d}t,$$

$$|u'_m(T)|^2-|u'_m(0)|^2+a(T,u_m(T),u_m(T))$$

$$-a(0,u_m(0),u_m(0))$$

$$-\int_0^T a'(t,u_m(t),u_m(t))\mathrm{d}t$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^T(f(t),u'_m(t))\mathrm{d}t.$$

利用 a 的强制性(设 $\lambda=0$)和 a,a' 的有界性，

$$|u'_m(T)|^2+\alpha\|u_m(T)\|^2$$

$$\leqslant M\|(u_m(0)\|^2+|u'_m(0)|^2)+M\int_0^T\|u_m(t)\|^2\mathrm{d}t$$

$$+\int_0^T |f(t)|^2 dt+\int_0^T |u_m'(t)|^2 dt.$$

利用 Gronwall 不等式，并换 T 为 t，得到不依赖于 m 的常数 C' 使

$$|u_m'(t)|^2+\|u_m(t)\|^2$$

$$\leqslant C\left(\|u_m(0)\|^2+|u_m'(0)|^2+\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)\leqslant C'.$$

于是存在子序列仍记为 u_m 满足：当 $m\to\infty$ 时

$$u_m\rightharpoonup u，在 L^\infty(0,T;V) 中弱^*，$$

$$u_m\rightharpoonup u'，在 L^\infty(0,T;H) 中弱^*.$$

现在过渡到极限。令

$$C_T^1([0,T])=\{\varphi\in C^1([0,T])\,|\,\varphi(T)=0\}.$$

考虑函数

$$\psi=\sum_{j=1}^N \varphi_j w_j,\ \varphi_j\in C_T^1([0,T]), \tag{4.24}$$

在(4.23)中取 $m>N$，(4.23)乘以 φ_j，从 1 至 N 求和，进行(对 t 的)分部积分，

$$\int_0^T [a(t,u_m,\psi)-(u_m',\psi')]dt$$

$$=\int_0^T (f,\psi)dt+(u_m'(0),\psi(0)).$$

令 $m\to\infty$，我们得到

$$\int_0^T [a(t,u,\psi)-(u',\psi')]dt$$

$$=\int_0^T (f,\psi)dt+(u_1,\psi(0)),$$

ψ 由(4.24)给出。令

$$\Psi = \{\psi \in L^2(0,T;V) \mid \psi' \in L^2(0,T;H), \psi(T) = 0\}.$$

由下面的引理，(4.24)给出的函数在 Ψ 中稠密，这里在 Ψ 中取范数

$$\|\psi\|_{\Psi}^2 = \|\psi\|_{L^2(0,T;V)}^2 + \|\psi'\|_{L^2(0,T;H)}^2.$$

于是对任意 $\psi \in \Psi$，

$$\int_0^T [a(t,u,\psi) - (u',\psi')]dt$$

$$= \int_0^T (f,\psi)dt + (u_1,\psi(0)). \qquad (4.25)$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty(0,T), v \in V$，在(4.25)中取 $\psi = \varphi v$ 得

$$\left(\int_0^T (A(t)u - f)\ \varphi dt - \int_0^T u'\varphi' dt, v\right)$$

$$= 0, \quad \forall v \in V.$$

由此得

$$\int_0^T (A(t)u - f)\varphi dt$$

$$= -\int_0^T (-u')\varphi' dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,T).$$

由广义导数定义

$$-u'' = A(t)u(t) - f.$$

由定理 3.13，嵌入 $W(0,T;V) \subset C([0,T];H)$ 连续，故由 $m \to \infty$ 时

$$u_m \rightharpoonup u, \text{在 } W(0,T;V) \text{ 中弱}$$

得

$$u_m(0) \rightharpoonup u(0), m \to \infty.$$

但 $u_m(0) \to u_0$，故 $u(0) = u_0$。致于 $u'(0) = u_1$ 可用通常的方

法证明。唯一性的证明同定理4.3，或用下面的能量等式。▎

引理4.4 形如(4.24)的函数关于范数$\| \ \|_{\Psi}$在Ψ中稠密。

证明 设$\psi \in \Psi$，对$a \in (0,T)$定义

$$\psi_a(t) = \begin{cases} \psi(t+a), & -a<t<T-a; \\ 0, & T-a<t<T. \end{cases}$$

令$f = f_a = \psi_a|_{(0,T)}$，由$\psi(T)=0$得$f_a \in \Psi$，且

$$\|f_a - \psi\|_{\Psi} \to 0 \quad (a \to 0).$$

于是只需对f证明引理。取$\theta_a \in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^1)$，在$(-a/2,T)$上$\theta_a = 1$，在$(-a/2,T)$外$\theta_a = 0$。令$g_a = \theta_a f$，则有

$$g_a \in L^2(\boldsymbol{R}^1;V), g_a' \in L^2(\boldsymbol{R}^1;H),$$

g_a在T附近为零，$g_a|_{(0,T)} = f_a$。只需对g_a证明引理，做卷积

$$g_{\varepsilon}(t) = \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g_a(t-s)\rho\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s,$$

ρ为一维光滑子。ε充分小时，g_{ε}在T附近为零，

$$\|g_{\varepsilon} - g_a\|_{\Psi} \to 0 \ (\varepsilon \to 0), g_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^1;V).$$

对g_{ε}用形如(4.24)的函数逼近，可按通常方式进行。▎

3.2 弱解的连续性

前面我们得到的解

$$u \in L^{\infty}(0,T;V), u' \in L^{\infty}(0,T;H),$$

实际有更强的结论。

定理4.7 在定理4.6的条件下，问题(4.21)的解

$$u \in C([0,T];V), u' \in C([0,T];H),$$

且有估计

$$\|u\|_{C([0,T];V)}+\|u'\|_{C([0,T];H)}$$
$$\leqslant C(\|f\|_{L^2(0,T;H)}+\|u_0\|+|u_1|). \qquad (4.26)$$

把 L^∞ 改进为 C，颇费笔墨，方法本身或许比结果更重要。基本思路是先证 $u(t)$ 弱连续，再证 $\|u(t)\|$ 连续，由这两点即得 $u(t)$ 在 V 中连续。证明 $\|u(t)\|$ 连续的关键是建立能量等式。

引理4.5 设 X 和 Y 是两个 Banach 空间，$X\subset Y$，从 X 到 Y 的等同映射是连续单射，X 自反，若 $u\in L^\infty(0,T;X)$，u 在 $[0,T]$ 上做为 Y 值函数弱连续，则 u 在 $[0,T]$ 上作为 X 值函数弱连续。

证明 设 $u\in L^\infty(0,T;X)$ 且 $u(t)\rightharpoonup u(t_0)$ $(t\to t_0)$ 在 Y 中弱。存在 $A\subset[0,T]$，$\mathrm{mes}A=0$，$\|u(t)\|_X\leqslant M$，$t\in[0,T]-A$。任取一点 $t_0\in[0,T]$，可找 $t_n\in[0,T]-A$，使 $t_n\to t_0$，由于 $\|u(t_n)\|_X\leqslant M$，X 又是自反的，故有子列 $u(t_{n_k})$ 在 X 中弱收敛到 $v\in X$。但 $u(t_{n_k})\rightharpoonup u(t_0)$，在 Y 中，故 $u(t_0)=v\in X$，这就说明 u 在 $[0,T]$ 上作为 X 值函数弱连续。▎

引理4.6 定理4.6中给出的解

$$u\in C_s([0,T];V),\ u'\in C_s([0,T];H).$$

这里对任意 Banach 空间 X，我们记

$$C_s([0,T];X)=\{u\,|\,u\text{ 在}[0,T]\text{上作为}X\text{值函数弱连续}\}.$$

证明 已知 $u\in L^\infty(0,T;V)$，$u'\in L^\infty(0,T;H)$，$u''=f-Au\in L^2(0,T;V')$，于是

$$u\in C([0,T];H),\ u'\in C([0,T];V').$$

更有

$$u\in C_s([0,T];H)\text{和 } u'\in C_s([0,T];V').$$

由引理4.5立刻得到结论。▎

引理4.7(能量等式) 设 u 是定理4.6给出的解，则有

$$a(t,u(t),u(t))+|u'(t)|^2$$

$$=a(0,u_0,u_0)+|u_1|^2+\int_0^t a'(\sigma,u(\sigma),u(\sigma))\ \sigma$$

$$+2\mathrm{Re}\int_0^t (f(\sigma),u'(\sigma))\mathrm{d}\sigma \qquad (4.27)$$

证明 取定 $t_0\in(0,T)$，设 $0<\delta<t_0/2$，定义函数 $\varphi\in C(\boldsymbol{R}^1)$，

$$\varphi=\varphi_\delta=\varphi_\delta(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant 0,\\ 1, & t\in[\delta,t_0-\delta],\\ 0, & t\geqslant t_0,\\ \text{线性}, & t\in[0,\delta]\text{或}\ t\in[t_0,\delta,t_0].\end{cases}$$

设 $\rho=\rho_n$ 是一维光滑子序列，ρ 是偶函数。把 $a(t,u,v)$ 和 f 延拓到 $\boldsymbol{R}^1$，且保持原有性质。u 亦延拓到 $\boldsymbol{R}^1$，且保持 $u\in L^\infty(\boldsymbol{R}^1;V)$，$u'\in L^\infty(\boldsymbol{R}^1;H)$ 和 $u''\in L^2(\boldsymbol{R}^1;V')$。

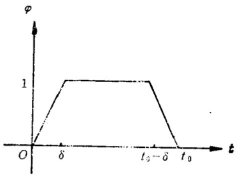


图 17

以下为书写简单，以[,]记 $L^2(\boldsymbol{R}^1;H)$ 中的内积或 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$ 和 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V')$ 间的对偶积。以 φ_0 记区间 $(0,t_0)$ 的特征函数，显然 $\varphi_\delta\to\varphi_0$ $(\delta\to 0)$。我们证明

$$[A'(t)\rho*(\varphi_0 u),\rho*(\varphi_0 u)]+2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi_0 Au),\rho*(\varphi_0 u')]$$

$$+2\mathrm{Re}[A\rho*(\varphi_0 u)-A*A(\varphi_0 u),\rho'*(\varphi_0 u)]$$

$$+2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0 Au)(0),u(0))$$

$$-2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0 Au)(t_0),u(t_0))=0. \qquad (4.28)$$

$$2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi_0 u''),\rho*(\varphi_0 u')]+2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0 u')(0),u'(0))$$

$$-2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0 u')(t_0),u'(t_0))=0 \qquad (4.29)$$

先证(4.28)。从下列明显的等式出发：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A(t)\rho*(\varphi u),\rho*(\varphi u))\mathrm{d}t=0.$$

由此

$$2\mathrm{Re}[A(\rho*(\varphi u)),(\rho*(\varphi u))']$$

$$+[A'(\rho*(\varphi u)),\rho*(\varphi u)]=0.$$

利用卷积的性质

$$(\rho*(\varphi u))'=\rho'*(\varphi u)=\rho*(\varphi u)'$$

得等式

$$[A'(\rho*(\varphi u)),\rho*(\varphi u)]+2\mathrm{Re}[\rho*(A\varphi u),\rho*(\varphi u')]$$

$$+2\mathrm{Re}[\rho*(A\varphi u),\rho*(\varphi' u)]$$

$$+2\mathrm{Re}[A(\rho*(\varphi u))-\rho*(A\varphi u),\rho'*(\varphi u)]=0. \qquad (4.30)$$

现令 $\delta\to 0$在(4.30)中过渡到极限。由于

$$(\varphi-\varphi_0)(t)\to 0 \quad (\delta\to 0)且|\varphi_\delta(t)|\leqslant 1,$$

利用 Lebesgue 收敛定理易知对(4.30)中的第一、二、四项只需以 φ_0代 φ 即得极限。唯第三项因含 φ'需特殊处理。它可改写为

$$2\mathrm{Re}[\rho*(A\varphi u),\rho*(\varphi' u)]$$

$$=2\mathrm{Re}[\rho*(A(\varphi-\varphi_0)u),\rho*(\varphi' u)]$$

$$+2\mathrm{Re}[\rho*(A\varphi_0 u),\rho*(\varphi' u)] \qquad (4.31)$$

显然当 $\delta\to 0$ 时

$$\|(\varphi-\varphi_0)u\|_{L^1(\mathbf{R}^1;V)}\to 0.$$

故有当 $\delta\to 0$ 时

$$\|\rho * A(\varphi-\varphi_0)u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^1;V')}\to 0.$$

又由

$$\int_{\mathbf{R}} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = 2$$

知 $\varphi*(\varphi' u)$ 在 $L^1(\mathbf{R}^1;V)$ 中有界，故(4.31)中第一项当 $\delta\to 0$ 时极限为零。而第二项由 $(\rho*\rho*(A\varphi_0u)(\cdot),u(\cdot))$ 的连续性，当 $\delta\to 0$ 时

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}[\rho*(A\varphi_0u),\rho*(\varphi' u)]\\
&\quad=2\mathrm{Re}[\rho*\rho*(A\varphi_0u),\varphi' u]\\
&\quad=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^\delta (\rho*\rho*(A\varphi_0u)(t),u(t))\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0}(\rho*\rho*(A\varphi_0u)(t),u(t))\mathrm{d}t\right\}\\
&\to 2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(A\varphi_0u)(0),u(0))\\
&\quad-2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(A\varphi_0u)(t_0),u(t_0)).
\end{aligned}$$

(4.28)得证。

再证(4.29)。这次从下式出发

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho*(\varphi u'),\rho*(\varphi u'))\mathrm{d}t=0.$$

由此得

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi u'),\rho*(\varphi u'')]+2\mathrm{Re}[\rho*((\varphi-\varphi_0)u'),\\
&\quad\rho*(\varphi' u')]+2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi_0u'),\rho*(\varphi' u')]\\
&\quad=0.
\end{aligned}\tag{4.32}$$

易知当 $\delta\to 0$ 时，上式一、二两项分别趋于零和

$$2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi_0u'),\rho*(\varphi_0u'')].$$

而(4.32)的第三项

$$
\begin{aligned}
&2\mathrm{Re}[\rho*(\varphi_0u'),\rho*(\varphi'u')]\\
&=2\mathrm{Re}[\rho*\rho*(\varphi_0u'),\varphi'u']\\
&=2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}(\rho*\rho*(\varphi_0u'),u')\mathrm{d}t\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0}(\rho*\rho*(\varphi_0u'),u')\mathrm{d}t\right\}\\
&\to 2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0u')(0),u'(0))\\
&\quad-2\mathrm{Re}(\rho*\rho*(\varphi_0u')(t_0),u'(t_0)).
\end{aligned}
$$

(4.29)得证。

把(4.28)和(4.29)相加，考虑到等式

$$A(t)u(t)+u''(t)=f(t),$$

我们得到

$$
\begin{aligned}
&[A'(\rho_n*(\varphi_0u),\rho_n*(\varphi_0u)]+2\mathrm{Re}[\rho_n*(\varphi_0f),\rho_n(\varphi_0w')]\\
&\quad-2\mathrm{Re}[A(\rho_n*(\varphi_0u)-\rho_n*(A\varphi_0u))',\rho*(\varphi_0u)]\\
&\quad+2\mathrm{Re}(\rho_n*\rho_n*(\varphi_0Au)(0),u(0))\\
&\quad-2\mathrm{Re}[\rho_n*\rho_n*(\varphi_0Au)(t_0),u(t_0)]\\
&\quad+2\mathrm{Re}(\rho_n*\rho_n*(\varphi_0u')(0),u'(0))\\
&\quad-2\mathrm{Re}(\rho_n*\rho_n*(\varphi_0u')(t_0),u'(t_0))=0. \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

由下面的引理4.8知(4.33)的第三项当 $n\to\infty$ 时 极限为零。易见第一、二两项的极限分别为

$$[A'(\varphi_0u),\varphi_0u]\text{和}2\mathrm{Re}[\varphi_0f,\varphi_0u'].$$

只留下考察后四项的极限.由于 0 和t_0 的地位一样,只需证明

$$2\mathrm{Re}(\sigma_n*(\varphi_0Au)(t_0),u(t_0))\to a(t_0,u(t_0),u(t_0)),$$

$$n\to\infty, \qquad (4.34)$$

$$2\mathrm{Re}(\sigma_n*(\varphi_0u')(t_0),u'(t_0))\to|u'(t_0)|^2. \qquad (4.35)$$

其中 $\sigma_n=\rho_n*\rho_n$。由于

$$2\mathrm{Re}(\sigma_n*(\varphi_0Au)(t_0),u(t_0))$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^{t_0}\sigma_n(t)(Au(t_0-t),u(t_0))\mathrm{d}t,$$

和对充分大的 n 由 ρ 的偶性知

$$\int_0^{t_0}\sigma_n(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

我们得

$$2\mathrm{Re}(\sigma_n*(\varphi_0Au)(t_0),u(t_0))-(A(t_0)u(t_0),u(t_0))$$

$$=2\mathrm{Re}\int_0^{t_0}\sigma_n(t)(Au(t_0-t)-Au(t_0),u(t_0))\mathrm{d}t\to0,$$

$$n\to\infty.$$

类似地证(4.35)。引理得证。▌

引理4.8 设算子 $A=A(t)$ 满足条件

$$A(t)\in\mathscr{L}(V,V'),\|A(t)\|\leqslant M.$$

对任意 u,v,

$$|(A(t)u,v)'|=|(A'(t)u,v)|\leqslant M\|u\|\|v\|,$$

$\rho=\rho_n$ 为光滑化序列，则对 $u\in L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$ 有：$n\to\infty$ 时在 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V')$ 中

$$V_n=(A(t)(u*\rho_n)-(A(t)u)*\rho_n)'\to0.$$

证明 以 T_n 记从 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$ 到 $L^2(\boldsymbol{R}^1;V')$ 的映射 $u\mapsto u_n$。设 $u\in C_0^1(\boldsymbol{R}^1;V)$，则

$$v_n=A'(t)(u*\rho_n)+A(t)(u'*\rho_n)-(A'(t)u)*\rho_n$$
$$-(A(t)u')*\rho_n.$$

注意到 u 有紧支集，由卷积的性质，当 $n\to\infty$ 时在 V' 中

$$v_n(t)\to0,$$

关于 t 在 $\boldsymbol{R}^1$ 一致，并且

$$\operatorname{supp} v_n \subset A, m(A) < \infty, A = B_{r+1}(0), \operatorname{supp} u \subset B_r,$$

由此得

$$\|v_n\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V')} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

对一般的 $u \in L^2(\boldsymbol{R}^1;V)$，采用逼近推理，只要验证了存在与 n 无关的常数 M' 使

$$\|T_n\|_{\mathscr{L}(L^2(\boldsymbol{R}^1;V), L^2(\boldsymbol{R}^1;V'))} \leqslant M'.$$

由于

$$v_n(t) = A'(t)(u * \rho_n) + w_n(t),$$

$$w_n(t) = A(t)(u * \rho_n')(t) - (A(t)u) * \rho_n',$$

$$\|u * \rho_n\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)} \leqslant \|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)}, \|A'(t)\| \leqslant M,$$

故

$$\|A'(t)(u * \rho_n)\|_{\mathscr{L}(L^2(\boldsymbol{R}^1;V), L^2(\boldsymbol{R}^1;V'))} \leqslant M.$$

再看算子 $u \mapsto w_n$ 的范数，

$$w_n(t) = \int_{-1/n}^{1/n} (A(t) - A(t-s))u(t-s)\rho_n'(s)\mathrm{d}s.$$

由于

$$|(A(t)u,v)'| \leqslant |(A'(t)u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|,$$

故

$$\|A(t) - A(t-s)\|_{\mathscr{L}(V,V')} \leqslant M|s|.$$

我们有

$$\|w_n(t)\|_{V'} \leqslant Mn^{-1}\|u\|_V * |\rho_n'|(t).$$

由 Minkowski 不等式

$$\|w_n\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V')} \leqslant Mn^{-1}\|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)} \|\rho_n'\|_{L^1(\boldsymbol{R}^1)} = MM''\|u\|_{L^2(\boldsymbol{R}^1;V)}.$$

$$M'' = n^{-1}\int_{\boldsymbol{R}^1} |\rho_n'(t)|\mathrm{d}t = n^{-1}\int_{\boldsymbol{R}^1} \left|\rho'\left(\frac{t}{n}\right)\right|\mathrm{d}t$$

$$= \int_{R^1} |\rho'(t)| dt.$$

取$M' = M\left(1 + \int_{R^1} |\rho'(t)| dt\right)$即得结论。 ▌

现已万事俱备，终于可以返回

定理4.7的证明 由能量等式(4.27)，函数

$$t \mapsto a(t, u(t), u(t)) + |u'(t)|^2$$

在$[0,T]$连续，又函数$t \mapsto u(t)$从$[0,T]$到H强连续，故函数

$$t \mapsto \varphi(t) = a(t, u(t), u(t)) + \lambda |u(t)|^2 + |u'(t)|^2$$
$$= a_\lambda(t, u(t), u(t)) + |u'(t)|^2$$

在$[0,T]$连续。设$t_n \to t$，记

$$\xi_n = |u'(t_n) - u'(t)|^2 + a_\lambda(t_n, u(t_n) - u(t), u(t_n) - u(t)),$$

则有

$$\xi_n = \varphi(t_n) + \varphi(t) + 2\mathrm{Re}\, a_\lambda(t_n, u(t), u(t)) - a_\lambda(t, u(t), u(t))$$
$$- 2\mathrm{Re}(u'(t_n), u'(t)) - 2\mathrm{Re}\, a_\lambda(t, u(t_n), u(t))$$
$$- 2\mathrm{Re}(a_\lambda(t_n, u(t_n), u(t)) - a_\lambda(t, u(t_n), u(t))).$$

而由$a(\cdot, u, v) \in C^1([0,T])$，$\forall u, v \in V$推得对

$$a'(t, u, v) = \frac{\partial}{\partial t} a(t, u, v)$$

有

$$|a'(t, u, v)| \leqslant M \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

(证明留作习题，)从而

$$|a_\lambda(t_n, u(t), u(t)) - a_\lambda(t, u(t), u(t))| \leqslant M |t - t_n|,$$
$$|a_\lambda(t_n, u(t_n), u(t)) - a_\lambda(t, u(t_n), u(t))| \leqslant M |t - t_n|.$$

再由u和u'在V和H中的弱连续性，当$n \to \infty$时

$$\xi_n \to 2\varphi(t) - 2\mathrm{Re}(|u'|^2 + a_\lambda(t, u(t), u(t))) = 0.$$

由于$\xi_n \geqslant |u'(t_n) - u'(t)|^2 + \alpha \|u(t_n) - u(t)\|^2$，定理得证。 ▌

3.3 弱解的正则性

定理4.8 保留定理4.6的条件，并设 $a(\cdot,u,v)\in C^2([0,T])$，$\forall u,v\in V$，$f\in H^1(0,T;H)$，$u_0\in D(A(0))$（即 $A(0)u_0\in H$），$u_1\in V$，则存在唯一的 $u\in C([v,T];V)$，满足 $u'\in L^\infty(0,T;V)$，$u''\in L^2(0,T;H)$ 和(4.21)。

证明 我们现在在更强的假设之下，继续推进定理4.6证明中的估计。不妨设 $w_1=u_0$。设近似解 $u_m=\sum\limits_{i=1}^{m}g_{mi}w_i$ 满足

$$\begin{cases}(u_m''(t),w_j)+a(t,u_m(t),w_j)=(f(t),w_j),\ j=1,\cdots,m;\\ g_{m1}(0)=1,\quad g_{mj}(0)=0,\quad j=2,\cdots,m;\\ g_{mi}'(0)=\eta_{mi},\text{当}m\to\infty\text{时},\quad \sum\limits_{i=1}^{m}\eta_{mi}w_i\to u_1\ (V\text{中})。\end{cases}\tag{4.36}$$

常微分方程组的 Cauchy 问题(4.36)有唯一解 $\{g_{mi}\}_{i=1}^{m}$，相应近似解 u_m 已有估计

$$\|u_m(t)\|^2+|u_m'(t)|^2\leqslant C(\|u_0\|^2+|u_{1m}|^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;H)})。\tag{4.37}$$

现在 $f'\in L^2(0,T;H)$，易知 g_{mi}'' 绝对连续，g_{mi}''' 几乎处处存在，在(4.36)方程两端对 t 求导

$$(u_m''',w_j)+a(t,u_m',w_j)+a'(t,u_m,w_j)=(f',w_j),\quad j=1,\cdots,m。\tag{4.38}$$

以 g_{mj}'' 乘(4.38)，对 j 从1至 m 求和

$$(u_m''',u_m'')+a(t,u_m',u_m'')+a'(t,u_m,u_m'')=(f',u_m'')。\tag{4.39}$$

两端取实部的二倍，利用 a 的共轭对称性

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[|u''(t)|^2+a(t,u_m',u_m')]+2\mathrm{Re}a'(t,u_m,u_m'')$$

$$- a'(t, u_m'(t), u_m'(t))$$

$$= 2\mathrm{Re}(f'(t), u_m''(t)),$$

在$[0,t]$上积分此式得

$$|u_m''(t)|^2 + a(t, u_m'(t), u_m'(t))$$

$$+ 2\mathrm{Re}\int_0^t [a'(t, u_m(t), u_m''(t)) - a'(t, u_m'(t), u_m'(t))]\mathrm{d}t$$

$$= |u_m''(0)|^2 + a(0, u_m'(0), u_m'(0)) + 2\mathrm{Re}\int_0^t (f'(t), u_m''(t))\mathrm{d}t, \tag{4.40}$$

其中

$$|a(0, u_m'(0), u_m'(0))| \leqslant M\|u_m'(0)\|\|u_m'(0)\|.$$

由于 $m\to\infty$ 时在 V 中 $u_m'(0)\to u_1$，存在不依赖于 m 的 M' 使

$$|a(0, u_m'(0), u_m'(0))| \leqslant M'.$$

现在来估计$|u_m''(0)|$。在(4.36)中取 $t=0$，乘以 $g_{mj}'(0)$，对 j 从 1 至 m 求和

$$(A(0)u_0, u_m''(0)) + (u_m''(0), u_m''(0)) = (f(0), u_m''(0)),$$

$$|u_m''(0)|^2 = (f(0) - A(0)u_0, u_m''(0))$$

$$\leqslant |f(0) - A(0)u_0|\,|u_m''(0)|.$$

于是得

$$|u_m''(0)| \leqslant |f(0) - A(0)u_0| \leqslant |f(0)| + |A(0)u_0|.$$

再估计两个积分项。由 a' 和 a'' 的有界性

$$\left|\int_0^t a'(t, u_m(t), u_m''(t))\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a'(t, u_m(t), u_m'(t))\mathrm{d}t\right.$$

$$-\int_0^t a'(t, u_m'(t), u_m'(t))\mathrm{d}t$$

$$-\int_0^t a''(t,u_m(t),u_m'(t))\mathrm{d}t \Big|$$

$$= \Big| a'(t,u_m(t),u_m'(t)) - a'(0,u_m(0),u_m'(0))$$

$$-\int_0^t a'(t,u_m'(t),u_m'(t))\mathrm{d}t - \int_0^t a''(t,u_m(t),u_m'(t))\mathrm{d}t \Big|$$

$$\leqslant M\|u_m(t)\|\|u_m'(t)\| + M\|u_m(0)\|\|u_m'(0)\|$$

$$+\int_0^t M\|u_m'(t)\|^2\mathrm{d}t + \int_0^t M\|u_m(t)\|\|u_m'(t)\|\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \varepsilon\|u_m'(t)\|^2 + \frac{M^2}{2\varepsilon}\|u_m(t)\|^2 + \frac{M}{2}\|u_m(0)\|^2$$

$$+\frac{M}{2}\|u_m'(0)\|^2 + \int_0^t M\|u_m'\|^2\mathrm{d}t + \frac{M}{2}\int_0^t\|u_m\|^2\mathrm{d}t$$

$$+\frac{M}{2}\int_0^t\|u_m'(t)\|^2\mathrm{d}t,$$

$$\left|\int_0^t a'(t,u_m'(t),u_m'(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^t\|u_m'(t)\|^2\mathrm{d}t,$$

把这些估计代入(4.40)，取 $\varepsilon = \frac{a}{2}$，整理后得

$$\|u_m'(t)\|^2 + |u_m'(t)|^2 \leqslant C(\|u_0\|^2 + \|u_m'(0)\|^2 + |f(0)|^2$$

$$+\int_0^t |f'(t)|^2\mathrm{d}t + \int_0^t(\|u_m'(t)\|^2$$

$$+|u_m''(t)|^2)\mathrm{d}t).$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|u_m'(t)\|^2 + |u_m''(t)|^2 \leqslant C(\|u_0\|^2 + \|u_m'(0)\|^2 + |f(0)|^2$$

$$+\int_0^t |f'(t)|^2 dt) \leqslant C, \quad m=1,2,\cdots.$$

跟定理4.6的证明一样，过渡到极限即知

$$u' \in L^\infty(0,T;V), u'' \in L^\infty(0,T;H). \quad \blacksquare$$

例 设 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$，$\partial\Omega \in C^2$，$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q)$，

$$a_{ij}(x,\cdot), b_i(x,\cdot), c(x,\cdot) \in C^2([0,T]$$

并且

$$\|a_{ij}(x,\cdot)\|_{C^2([0,T])}, \|b_i(x,\cdot)\|_{C^2([0,T])}, \|C(x,\cdot)\|_{C^2([0,T])} \leqslant C, \quad \forall x \in \Omega.$$

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant a|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \boldsymbol{R}^n, a>0,$$

$$a(t,u,v) = \int_\Omega (a_{ij}(x,t)D_i u D_j \bar{v} + b_i D_i u \bar{v} + c u \bar{v}) dx$$

$$= \overline{a(t,v,u)}.$$

$f \in L^2(Q)$，$\dfrac{\partial f}{\partial t} \in L^2(Q)$，$u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$u_1 \in {}_0^1(\Omega)$，

则由定理4.8知存在唯一的 $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ 满足

$$u' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), u'' \in L^2(Q)$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f, & (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

由于 $Au = f - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$，根据椭圆型方程解的正则性定理

$$u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)),$$

更有 $u\in H^2(Q)$。 ▌

前面讨论的解 $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$，表面解满足齐次边界条件，现在对非齐次边界条件做一个简短的讨论。设初值 u_0,u_1 和边值 g 给定，若存在 w 满足

$$\begin{cases}w''+Aw=\varphi\in H^1(0,T;L^2(\Omega)),\\ \gamma w=g,\quad \Sigma=\partial\Omega\times(0,T)\text{上},\\ w(0)=u_0,w'(0)=u,\quad \Omega\text{上},\end{cases}$$

其中 γ 为 $\partial\Omega$ 上的迹算子。令 $u-w=\psi$，ψ 满足

$$\psi\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

$$\begin{cases}\psi''+A\psi=f-\varphi,\\ \psi(0)=0,\quad \psi'(0)=0.\end{cases}$$

u 将满足

$$\begin{cases}u''+Au=f,\\ \gamma u=g,\\ u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1.\end{cases}$$

对 ψ 可应用上面例题的正则性结论，问题归结为由 u_0,u_1 和 g 提升所得的 w 的正则性。这里 u_0,u_1 和 g 作为 w 在 $t=0$ 和 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上的迹，除本身具有适当的正则性外，还必须满足一定的相容性条件。为使 $\varphi=w''+Aw\in H^1(0,T;L^2(\Omega))$，只需要

$$w,w'\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\quad w'''\in L^2(Q).\tag{4.41}$$

引理4.9 w 满足(4.41)的充分必要条件是

$$w(t)=w_0+\int_0^t\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\psi\in H^2(Q),w_0\in H^2(\Omega).\tag{4.42}$$

证明 若 $\psi\in H^2(Q)$，即

$$\psi\in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\psi''\in L^2(Q),$$

(4.41)给定的 w 显然满足(4.42)。

反之，若 w 满足(4.41)，则

$$w' = \psi \in H^2(Q) \subset L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

w 从 $[0,T]$ 到 $H^2(\Omega)$ 绝对连续，故

$$w(0) = w_0 \in H^2(\Omega),$$

且表达式(4.42)成立。 ▌

引理4.10 若 w 满足(4.41)，则

$$\begin{cases} \gamma w = g \in H^1(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^{5/2}(0,T;L^2(\partial\Omega)), \\ w(x,0) = w_0 \in H^2(\Omega), \\ w'(x,0) = w_1 \in H^{3/2}(\Omega), \end{cases} \tag{4.43}$$

且成立局部和全局相容条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t}(x,0) = w_1(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_0^{\sigma_0} \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial t}(x+\sigma\nu,0) - \frac{\partial w}{\partial t}(x,\sigma) \right|^2 \mathrm{d}\Gamma \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} < \infty, \end{cases} \tag{4.44}$$

其中 ν 是 $x \in \partial\Omega$ 处的单位内法向量。

证明 由表达式(4.42)，

$$\gamma w(t) = \gamma w_0 + \gamma \int_0^t \psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

由 $w_0 \in H^2(\Omega)$ 得 $\gamma w_0 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$。由 γ 的连续性易知 γ 和积分可交换。

$$\gamma \int_0^t \psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma = \int_0^t \gamma\psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

由于 $\psi \in H^2(Q)$，根据迹定理

$$\gamma\psi \in H^{3/2}(\Sigma) = L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T;L^2(\partial\Omega)).$$

经一次积分则有

$$\gamma \int_0^t \psi(\sigma)\mathrm{d}\sigma \in H^1(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^{5/2}(0,T;L^2(\partial\Omega)).$$

由于 $w' = \psi \in H^2(Q)$，再由迹定理，$w'(\cdot,0) \in H^{3/2}(\Omega)$。相容条件(4.44)是定理3.11的直接推论。 ▎

引理4.11 设g, w_0和w_1满足

$$g \in H^1(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^{5/2}(0,T;L^2(\partial\Omega)),$$
$$w_0 \in H^2(\Omega), \quad w_1 \in H^{3/2}(\Omega)$$

和相容条件(4.44)，则存在w满足(4,41)和(4.43)。

证明 由条件知

$$g' \in L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)) \cap H^{3/2}(0,T,L^2(\partial\Omega))$$
$$= H^{3/2,\,3/2}(\Sigma),$$

又有 $w_1 \in H^{3/2}(\Omega)$，并且相容条件(4.44)满足，根据迹定理3.11存在函数 $\theta \in H^2(Q)$ 使

$$\begin{cases} \gamma\theta = g'; \\ \theta(x,0) = w_1. \end{cases}$$

令

$$w = F + w_0 + \int_0^t \theta(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

要求F满足

$$F \in L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)), \quad F' = \frac{\partial F}{\partial t} \in H^2(Q),$$

$$F(x,0) = 0, \quad F'(x,0) = 0, \quad x \in \Omega.$$

w 将满足(4.41)和(4.43)。做函数 $G(x,t) \in H^2(Q)$满足

$$G(\cdot,0) = 0, G(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega).$$

令

$$F = \int_0^t G(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

F必满足要求。 ▎

定理4.9 设定理4.8后面的例题的条件成立，又设

$$f\in H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$g\in H^1(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))\cap H^{5/2}(0,\ T;L^2(\partial\Omega)),$$

$$u_0\in H^2(\Omega),u_1\in H^{3/2}(\Omega),$$

且相容条件(4.44)成立，则存在解 $u\in H^2(\theta)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+Au=f & (x,t)\in Q,\\ u(x,t)=g(x,t), & (x,t)\in\Sigma,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x), & x\in\Omega.\end{cases}$$

证明 这是该例题结论和引理4.11的直接推论. ▎

§4 特征函数展开的应用

我们回到算子

$$A=-D_j(a_{ij}D_i)+b_iD_iu+c$$

的系数不依赖于 t 的情形，假设

$$\begin{cases}a_{ij}\in C^0(\bar{\Omega}),\ \ b_i,c\in L^\infty(\Omega),\\ \mathrm{Re}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\alpha|\xi|^2,\xi\in\boldsymbol{R}^n,x\in\Omega,\ \alpha>0\text{为常数},\\ a(u,v)=\displaystyle\int_\Omega[a_{ij}C_iuD_j\bar{v}+b_iD_iu\bar{v}+cu\bar{v}]\mathrm{d}x\\ \quad=\overline{a(v,u)},\quad\forall u,v\in H_0^1(\Omega).\end{cases}\tag{4.45}$$

由 Gårding 不等式，存在 $\lambda_0>0,\delta>0$ 使

$$a(v,v)+\lambda_0\|v\|_0^2\geqslant\delta\|v\|_1^2,\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{4.46}$$

根据定理2.16存在A的特征函数序列

$U_j,j=1,2,\cdots,\{U_j\},\{(\lambda_j+\lambda_0)^{-1/2}U_j\}$和$\{(\lambda_j+\lambda_0)^{1/2}U_j\}$

分别组成 $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$和 $H^{-1}(\Omega)$中的标准正交基，λ_j是相应 U_j 的特征值。

定理4.10 设定理2.16的条件满足，则对

$$u_0\in H_0^1(\Omega),u_1\in L^2(\Omega)\text{和}f\in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

存在唯一的

$$u\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

满足 $u''\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$和

$$\begin{cases}u''+Au=f,\\u(0)=u_0,\\u'(0)=u_1.\end{cases}\tag{4.47}$$

证明 按特征函数分别展开数据和解

$$f(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}f_j(t)U_j,$$

$$u_0=\sum_{j=1}^{\infty}u_{0j}U_j,$$

$$u_1=\sum_{j=1}^{\infty}u_{1j}U_j,$$

$$u=\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)U_j.$$

$u_j(t)$应满足

$$\begin{cases}u_j''+\lambda_ju_j=f_j;\\u_j(0)=u_{0j};\qquad j=1,2,\cdots.\\u_j'(0)=u_{1j},\end{cases}$$

不妨设 $\lambda_j>0$, $j=1,2,\cdots$。这个 Cauchy 问题的解

$$u_j(t)=u_{0j}\cos(\sqrt{\lambda_j}t)+u_{1j}\frac{\sin\sqrt{\lambda_j}t}{\sqrt{\lambda_j}}$$

$$+\int_0^t f_j(s)\frac{\sin\sqrt{\lambda_j}(t-s)}{\sqrt{\lambda_j}}\mathrm{d}s. \qquad (4.48)$$

从 u_0, u_1 和 f 所属的函数空间利用定理2.16知道

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)|u_{0j}|^2=\|u_0\|_1^2;\\ \sum_{j=1}^{\infty}|u_{1j}|^2=\|u_1\|_0^2;\\ \int_0^T\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(t)|^2\right)^{1/2}\mathrm{d}t=\|f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}.\end{cases} \qquad (4.49)$$

由级数的三角不等式和 Minkowski 不等式得

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)|u_j(t)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)|u_{0j}|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j+\lambda_0}{\lambda_j}\sin^2\sqrt{\lambda_j}t\,|u_{1j}|^2\right)^{1/2}$$

$$+\int_0^t\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(s)|^2\frac{\lambda_j+\lambda_0}{\lambda_j}\sin^2(\sqrt{\lambda_j}(t-s))\right)^{1/2}\mathrm{d}s.$$

由于 $\lambda_j\to+\infty(j\to+\infty)$，存在常数 $C>0$，使对任意

$$t\in\boldsymbol{R}^1,\quad j=1,2,\cdots,$$

$$\frac{\lambda_j+\lambda_0}{\lambda_j}\sin^2(\sqrt{\lambda_j}t)\leqslant C.$$

于是

$$\|u(\cdot,t)\|_1^2\leqslant\|u_0\|_1^2+\|u_1\|_0^2+C\int_0^t\|f(\cdot,t)\|_0\mathrm{d}t.$$

这就证明了

$$u\in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

为证实际上有$u\in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$，由级数估计差

$$
\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)-u(\cdot,t')\|\\
&=\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)|u_j(t)-u_j(t')|^2\Big)^{1/2}\\
&\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)|u_{0j}|^2H_j^2(t,t')\Big)^{1/2}\\
&\quad+\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|u_{1j}|^2K_j^2(t,t')\Big)^{1/2}\\
&\quad+\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_{t'}^{t}|f_j(s)||K_j(t-s,t'-s)|\mathrm{d}s\Big)^2\Big)^{1/2}\\
&\quad+\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\int_{0}^{t}|f_j(s)||K_j(t-s,t'-s)\mathrm{d}s\Big)^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

其中

$$H_j(t,t')=\cos(\sqrt{\lambda_j}t)-\cos(\sqrt{\lambda_j}t').$$

$$K_j(t,t')=\Big(\frac{\lambda_j+\lambda_0}{\lambda_j}\Big)^{1/2}(\sin(\sqrt{\lambda_j}t)-\sin(\sqrt{\lambda_j}t')).$$

显然$|H_j(t,t')|\leqslant 2$，又存在不依赖于t,t'和j的常数C使

$$|K_j(t,t')|\leqslant C.$$

对固定的j，

$$H_j(t,t')\to 0,\quad K_j(t,t')\to 0\quad(t'\to t).$$

由对级数的控制收敛定理，(4.50)前两项当$t'\to t$时极限为零。由 Minkowski 不等式第三项不超过

$$
\begin{aligned}
&C\Big|\int_{t'}^{t}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(s)|^2\Big)^{1/2}\mathrm{d}s\Big|\\
&\quad=C\Big|\int_{t'}^{t}|f(s)|\mathrm{d}s\Big|\to 0\quad(t'\to t).
\end{aligned}
$$

而对第四项同样由 Minkowski 不等式不超过

$$\int_0^t (\sum |f_j(s)|^2 |K_j(t-s,t'-s)|^2)^{1/2} ds,$$

其被积函数

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(s)|^2 |K_j(t-s,t'-s)|^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(s)|^2\right)^{1/2} = C|f(s)| \in L^1(0,T).$$

又由 $K_j(t-s,t'-s) \to 0 (t' \to t)$ 和级数的控制收敛定理

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(s)|^2 K_j(t-s,t'-s)|^2\right)^{1/2} \to 0 (t' \to t),$$

$$\text{a.e.}\ s \in (0,T).$$

由积分控制收敛定理得 $t' \to t$ 时第四项的极限亦为零，这就证明了

$$u \in C^0([0,T]; H_0^1(\Omega)).$$

逐项微商得

$$u'(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j'(t) U_j(x),$$

$$u_j'(t) = -\sqrt{\lambda_j} u_{0j} \sin(\sqrt{\lambda_j} t) + u_{1j} \cos(\sqrt{\lambda_j} t).$$

类似可证

$$u' \in C^0([0,T]; L^2(\Omega)).\ \blacksquare$$

定理4.11 设定理4.10的条件成立，有界区域 Ω的边界 $\partial\Omega \in C^2$，并且

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), f \in H^1(0,T;L^2(\Omega)), u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$u_1 \in H_0^1(\Omega),$$

则问题(4.47)的解

$$u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)),\quad u' \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

证明 跟定理4.10的证明一样，设U_j是相应特征值λ_j的算子A的特征函数，

$$(U_i, U_j) = \delta_{ij}.$$

在$H_0^1(\Omega)$内引入内积

$$((u,v))_1 = a(u,v) + \lambda_0(u,v).$$

由椭圆型方程解的正则性定理，

$$E_j \in H^2(\Omega).$$

$(A+\lambda_0 I)^{-1}$看做$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$中的算子是紧自伴算子，其特征函数就是$U_j$，故$\{U_j\}$在$H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$中亦是基。在$H^2(\Omega)$中引入内积

$$((u,v))_2 = ((A+\lambda_0)u,\ (A+\lambda_0)v),$$

这个内积相应的范数和$H^2(\Omega)$中原来的范数等价，并且

$$((U_i, U_j))_2 = (\lambda_i+\lambda_0)(\lambda_j+\lambda_0)\delta_{ij}.$$

所以

$$\{(\lambda_i+\lambda_0)^{-1}U_i \mid i = 1,2,\cdots,\}$$

是$H^2(\Omega)$中的标准正交（关于内积$((\ ,\ ))_2$）基，$\sum c_i U_i$在$H^2(\Omega)$中收敛的充分必要条件是$\sum_{i=1}^{\infty}(\lambda_i+\lambda_0)^2 c_i^2$收敛。由条件

$$u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\quad u_1 \in H_0^1(\Omega),\ f \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$$

知道

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0)^2 u_{0j}^2 = \|u_0\|_2^2,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_j+\lambda_0) u_{1j}^2 = \|u_1\|_1^2,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f_j(t)|^2\in L^1(0,T),\ \sum_{j=1}^{\infty}|f_j'(t)|^2\in L^1(0,T).$$

由表达式$u(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}u_j(t)U_j(x)$（$u_j$由(4.48)定义）易证

$$u'\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

而由

$$\begin{aligned}u_j''(t)=&-\lambda_j u_{0j}\cos(\sqrt{\lambda_j}t)-\sqrt{\lambda_j}u_{1j}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\\&+f_j(t)-\sqrt{\lambda_j}\int_0^t f_j(s)\sin(\sqrt{\lambda_j}(t-s))\mathrm{d}s\\=&-\lambda_j u_{0j}\cos(\sqrt{\lambda_j}t)-\sqrt{\lambda_j}u_{1j}\sin(\sqrt{\lambda_j}t)\\&+f_j(0)\cos\sqrt{\lambda_j}t+\int_0^t f_j'(t)\cos(\sqrt{\lambda_j}(t-s))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

与前面类似可证$u''\in L^2(Q)$。▍

不言而喻，在椭圆算子A的系数不依赖t且有特征函数组成的完备正交基时，在Galerkin方法中就取这组正交基作基，实际就是特征函数展开法，这时常微分方程组是完全非耦合的方程组，其解可用简单的公式表达，而微分方程的解就展开成正交级数，解的估计化做加权的l^2中级数的估计，简洁清晰。

习　题

1. 证明定理4.5。
2. 证明定理4.10中的$u'\in C^0([0,T];L^2(\Omega))$。
3. 完成定理4.11的证明。
4. 用Galerkin方法证明定理3.16。

5. 用 Galerkin 方法证明定理3.17.

6. 用特征展开法证明定理3.20.

7. 用特征展开法证明定理3.21.

8. 用半群方法讨论双曲型方程的Neumann-Cauchy 问题。

9. 用半群方法讨论双曲型方程的第三边值-Cauchy 问题。

10. $H_\Delta^0(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\mid \Delta u\in L^2(\Omega)\}$, $H_0^2(\Omega)\subset V\subset H_\Delta^0(\Omega)$, $H=L^2(\Omega)$,

$$\|u\|_V^2=\|u\|_0^2+\|\Delta u\|_0^2,\quad \|u\|_0^2=\int_\Omega |f(x)|^2\mathrm{d}x.$$

$$a(t,u,v)=\int_\Omega a(x,t)\Delta u\Delta v\mathrm{d}x,$$

$$a(\cdot,t)\in L^\infty(\Omega),$$

$$t\mapsto a(\cdot,t)\text{ 从}[0,T],\to L^\infty(\Omega)\text{ 弱一次连续可微},$$

$$a(x,t)\geqslant a>0,\quad f\in L^2(0,T;H),\quad u_1\in H,$$

证明存在唯一的$u\in L^2(0,T;V)$，满足$u'\in L^2(0,T;H)$，

$$\begin{cases} a(t,u(t),v)+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(u(t),v)=(f(t),v),\ \forall v\in V,\\ \qquad\qquad \text{a.e.}\ t\in(0,T);\\ u(0)=0,\quad u'(0)=u_1. \end{cases}$$

写出 u 所满足的微分方程。

11. Ω 是有界区域，$\partial\Omega\in C^\infty$，第10题中取 $V=H_0^2(\Omega)$，解释相应方程和边条件。

12. 第10题中取 $V=\{v\in H_\Delta^0(\Omega)\mid \gamma_0 v=0\}$，解释相应的边条件。

13. 第10题中取 $V=\{v\in H_\Delta^0(\Omega)\mid \gamma_1 v=0\}$，解释相应的边条件。

主要参考书

［1］ J.L.Lions, E.Magenes, 《Problemes aux limites non homogenes》, volume 1 & 2, DUNOD PARIS, 1968.

［2］ J.L.Lions, 《Eguations differentielles operationnelle》 SPRINGER-VERLAG, 1961.

［3］ J.Cea, C. Goulaouc, 《Analyses fonctionnelle et numérique》.

［4］ R.E.Showalter, 《Hilbert space methods for partial differential equations》 PITMAN, 1977.

［5］ F.Treves, 《Basic linear partial differential equations》 ACADEMIC PRESS, 1975. 《基本线性偏微分方程》 陆桂家译，上海科学技术出版社.

［6］ D.Gilbarg, N.S.Trudinger, 《Elliptic partial differential equations of second order》 SPRINGER-VERLAG, 1977. 中译本：《二阶椭圆型偏微分方程》 上海科学技术出版社，叶其孝等译，1981.

［7］ A.Friedman, 《Partial dofferential equations》, HOLT, New York, 1969.

［8］ A.Pazy, 《Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations》 SPRINGER-VERLAG, 1983.